**УДК 517.9:531.1**

# ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ НАВЧАННЯ ФІЗИКИ В УНІВЕРСИТЕТІ

**кандидат фізико-математичних наук, доцент, Ярмоленко М. В.** Київський національний університет технологій та дизайну, Україна, Черкаси

*Запропоновано метод розв'язування диференційного рівняння, яке описує процес пірнання олівця у воду. Описано метод визначення в'язкості рідини за часом її витікання через горизонтальний капіляр з вертикальної посудини, використовуючи закон Пуазейля. Проаналізовано процес перенесення речовини вздовж дислокаційної трубки з одночасним проникненням у об'єм, використовуючи відповідне диференційне рівняння.*

*Ключові слова: фізика, диференційні рівняння, математичне моделювання, фізичний експеримент, дифузія, закон Пуазейля.*

*кандидат физико-математических наук, доцент Ярмоленко М. В. Особенности применения дифференциальных уравнений для обучения физике в университете / Киевский национальный университет технологий и дизайна, Украина, Черкассы*

*Предложен метод решения дифференциального уравнения, которое описывает процесс ныряния карандаша в воду. Описан метод определения вязкости жидкости путем измерения времени ее вытекания через горизонтальный капилляр из вертикальной посудины, используя закон Пуазейля. Проанализирован процесс переноса вещества вдоль дислокационной трубки с одновременным проникновением в объем, используя соответствующее дифференциальное уравнение.*

*Ключевые слова: физика, дифференциальные уравнения, математическое моделирование, физический эксперимент, диффузия, закон Пуазейля.*

*M. V. Yarmolenko, PhD in Physics and Mathematics, associate professor, Differential equations application peculiarities for teaching Physics in university / Kyiv National University of Technologies and Design, Ukraine, Cherkasy*

*A method to solve differential equation describing of diving a pencil into water is proposed. Method to determine of liquid viscosity using outflow time through narrow pipe applying the Poiseuille's law is described. Diffusion along dislocation pips inside a polycrystal grain involving outflow from dislocation line using appropriate differential equation is analised.*

*Key words: physics, differential equations, mathematical modelling, physics experiment, diffusion, the Poiseuille's law.*

**Вступ.** Будь-який фізичний процес може бути описаний відповідним диференційним рівнянням. Не кожне диференційне рівняння має аналітичний розв'язок. Процеси дифузії теж можуть бути описані відповідними диференційними рівняннями. Для того, щоб диференційне рівняння дифузії мало аналітичний розв'язок, необхідно робити відповідні фізично прийнятні припущення, які можуть значно спростити модель дифузії [1], [2], [3], [4], [5]. В освітньому процесі диференційні рівняння можуть застосовуватися для вивчення фізичних законів. Для досягнення кращого результату навчання у закладах вищої освіти (ЗВО) реальний фізичний лабораторний практикум за певними розділами фізики може бути доповнений комп'ютерним моделюванням тих лабораторних робіт, виконання яких в реальному режимі або важко, або вимагає моделювання, що дозволяє краще зрозуміти суть фізичних процесів (так звана віртуальна фізична лабораторія [6], [7]).

**Метод 1.** Сенс методу полягає в тому, що диференційне рівняння перетворюється таким чином, щоб воно складалося з двох співмножників, один з яких не може тотожно дорівнювати нулю. Тоді інший співмножник має дорівнювати нулю тотожно.

Розглянемо процес пірнання олівця у воду. Відповідне рівняння таке:

$$ma = mg - F_A \,, \tag{1}$$

де *m* – маса олівця, *a* – прискорення олівця, *g*=9,8 м/с$^2$, *FA* – виштовхувальна сила Архімеда. Оскільки прискорення – це друга похідна за часом від переміщення, отримаємо:

$$a = \frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{g}{\gamma H} z \,, \quad a(t=0) = g \,, \quad \gamma = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{z_0}{H} \,, \tag{2}$$

де *z* – глибина занурення олівця, *H* – його довжина, *z0* - глибина занурення олівця у стані рівноваги, коли сила тяжіння дорівнює силі Архімеда, *ρ* – густина води, *ρ1* - густина олівця. Шукаємо розв’язок у такому вигляді:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g\cos(\omega t) \,, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{g}{\omega}\sin(\omega t) \,, \tag{3}$$

$$z = \frac{g}{\omega^2}(-\cos(\omega t))\Big|_0^t = \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) \tag{4}$$

Підставивши формули (3) і (4) у формулу (2) отримаємо:

$$\left(\frac{g}{\gamma H \omega^2} - 1\right)(1 - \cos(\omega t)) = 0 \tag{5}$$

Оскільки другий співмножник не може дорівнювати нулю тотожно для будь-якого часу, тому отримаємо: $\omega^2 = \frac{g}{\gamma H}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma H}{g}}$. (6)

Оскільки час пірнання приблизно дорівнює часу виринання, остаточно знаходимо:

$$t_{\downarrow} \approx t_{\uparrow} = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{\gamma H}{g}} . \quad (7)$$

Якщо *H=20 см,* $z_0$ =10 см (олівець плаває у стані рівноваги наполовину занурившись у воду), то $t_{\downarrow} \approx t_{\uparrow} \approx 0{,}3\,секунди$, що співпадає з експериментально отриманими результатами.

**Метод 2.** Розглянемо процес витікання рідини з вертикальної посудини висотою $H_0$ через горизонтальний капіляр радіусом *R*, розташований біля її дна. Застосуємо закон Пуазейля (рівень рідини *H* зменшується):

$$dV = \frac{\Delta p R^4 \pi dt}{8\eta L}, \; dV = -dH\pi R_1^2, \quad \Delta p = \rho g H . \quad (8)$$

У формулах (8) застосовані такі позначення: *dV* – об’єм рідини, що витікає з капіляра за час *dt*, $\Delta p$ – різниця тисків рідини між входом у капіляр та виходом з капіляра, *L* – довжина капіляра, $\rho$ - густина рідини, $\eta$ – в’язкість рідини, $R_1$ – радіус вертикальної посудини. Отримаємо відповідне диференційне рівняння:

$$-\frac{dH}{H} = \frac{\rho g R^4 dt}{8R_1^2 \eta L}, \quad (9)$$

яке має такий розв’язок:

$$-\ln H\Big|_{H_0}^{2R} = \frac{\rho g R^4 t}{8R_1^2 \eta L} = \ln\left(\frac{H_0}{2R}\right). \quad (10)$$

Остаточно отримаємо:

$$\eta = \frac{\rho g R^4 t}{8R_1^2 L \ln\left(\frac{H_0}{2R}\right)}. \quad (11)$$

Відомо, що в’язкість рідин зменшується з підвищенням температури, тому експерименти проводилися для холодної та гарячої води. Циліндрична посудина мала висоту $H_0$ =120 мм та внутрішній радіус $R_1$ =21 мм, капіляр мав довжину $L$ =103 мм та внутрішній радіус $R$ =1,32 мм. Холодна вода ($T \approx 20^oC$) витекла з посудини за час $t_{хол}=47$ *секунд*, а гаряча вода ($T \approx 90^oC$) витекла з посудини за час $t_{гар}=38$ *секунд*. З підвищенням температури густина води зменшується. Табличні значення такі ([8], табл. 5 на с. 550): $\rho(T \approx 20^oC) \approx 998 кг/м^3$, $\rho(T \approx 90^oC) \approx 978 кг/м^3$. Обчислення за формулою (11) дали такі результати:

$$\eta(T \approx 20^o C) = \frac{\rho(T \approx 20^o C) t_{хол} g R^4}{8 R_1^2 L \ln(\frac{H_0}{2R})} \approx \rho t \cdot 2{,}143 \cdot 10^{-5} \approx 1{,}005 \cdot 10^{-3}\, Па \cdot с,$$

що співпадає з табличним значенням в'язкості води для $T \approx 20^oC$ ([8], табл. 10 на с.551),

$$\eta(T \approx 90^o C) = \frac{\rho(T \approx 90^o C) t_{гар} g R^4}{8 R_1^2 L \ln(\frac{H_0}{2R})} \approx \rho t \cdot 2{,}143 \cdot 10^{-5} \approx 0{,}797 \cdot 10^{-3}\, Па \cdot с,$$

тобто в'язкість води зменшується на $0{,}03 \cdot 10^{-3}$ Па·с при підвищенні температури на кожні 10°С. Метод має дуже хорошу точність і дозволяє демонструвати зміну в'язкості різних рідин від зміни температури, адже для цього необхідні лише термометр і секундомір.

**Метод 3.** Диференційні рівняння перенесення речовини (процес дифузії) подібні до диференційних рівнянь теплопровідності:

$$j(t, x) = \frac{dm}{dt} \frac{1}{\rho S} = -D \frac{dC}{dx}. \tag{12}$$

У формулі (12) застосовані такі позначення: $j(t,x)$ – швидкість перенесення речовини (густина потоку речовини) , $dm$ – маса речовини, яка переноситься за час $dt$, $\rho$ – густина речовини, яка переноситься, $S$ – площа, через яку речовина переноситься, $D$ - коефіцієнт дифузії, $dC$ – зменшення відносної концентрації на проміжку $dx$ вздовж напрямку дифузії. Густина потоку речовини залежить як від часу, так і від координати, тому рівняння (12) може мати аналітичний розв'язок лише для дуже спрощених моделей, які, проте, фізично правильно відображають відповідне явище. Таким явищем може бути дифузія вздовж дислокаційних трубок з одночасним проникненням у об’єм. Тоді замість рівняння (12) отримаємо таке рівняння, яке може бути розв’язане аналітично [2]:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{A}{y(t)} - B_d \frac{y(t)}{\sqrt[3]{t}} . \qquad (13)$$

Це рівняння може бути спрощене таким чином:

$$\frac{dz(t)}{dt} = 2A - \frac{2B_d}{\sqrt[3]{t}} z(t), \qquad \text{де} \qquad z(t) = u(t)v(t) = y^2(t), \qquad (14)$$

$$\frac{du(t)}{dt} v(t) + u(t)\left( \frac{dv(t)}{dt} + \frac{2B_d}{\sqrt{t}} v(t) \right) = 2A . \qquad (15)$$

Припущення $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{2B_d}{\sqrt[3]{t}} v(t) = 0$ дає такий розв’язок:

$$v(t) = e^{-3B_d \sqrt[3]{t^2}} = e^{-m^2}, \qquad \text{де} \quad m^2 = 3B_d t^{2/3} \quad \text{або} \quad m = \sqrt{3B_d} t^{1/3} . \qquad (16)$$

Подальший процес розв’язування наведено у роботі [2].

Остаточно отримаємо:

$$y(t) = \sqrt{\frac{A}{B_d}\sqrt[3]{t} - \frac{Ae^{-m^2}}{\sqrt{3B_d^3}} \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \frac{1 - e^{-\frac{4}{\sqrt{\pi}}mi}}{1 + e^{-\frac{4}{\sqrt{\pi}}mi}}} , \qquad (17)$$

де $i$ – уявна одиниця, тобто $i^2=-1$. Це рівняння є точним розв’язком рівняння (13), а наближений закон, який фізично правильно відображає дифузію вздовж дислокаційних трубок з одночасним проникненням у об’єм, такий: $y(t) = \left( \frac{A}{B_d} \right)^{1/2} t^{1/6}$, тобто глибина проникнення пропорційна кореню шостого степеня з часу дифузії.

**Висновок.** Запропоновані методи складання та розв'язування диференційних рівнянь для конкретних фізичних задач, а саме: для опису процесу пірнання олівця у воду, для опису процесу витікання рідини через горизонтальний капіляр з вертикальної посудини, для опису процесу перенесення речовини вздовж дислокаційної трубки з одночасним проникненням у об'єм.

***Література***:


1. Yarmolenko M.V. (2018). Analytically Solvable Differential Diffusion Equations Describing the Intermediate Phase Growth, *Металофізика і новітні технології,* 40 (9), 1201-1207 [англійською мовою].
2. Yarmolenko M.V. (2018). Intermediate phase cone growth kinetics along dislocation pipes inside polycrystal grains, *AIP Advances*, 8(9), 095202- 1–095202-5 [англійською мовою].
3. Yarmolenko M.V., Gusak A.M., Gurov K.P. (1993). A model of growth of an intermediate phase in bi- and polycrystals, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 65(3), 876 – 881 [англійською мовою].
4. Gusak A.M., Yarmolenko M.V. (1993). A simple way of describing the diffusion phase growth in cylindrical and spherical samples, *Journal of Applied Physics*., 73 (10), 4881-4884 [англійською мовою].
5. Yarmolenko M.V. (1997). Describing the Diffusion Phase Growth in Polycrystals: Analytical Solution, *Defect and Diffusion Forum*, 143-147, 1567- 1572 [англійською мовою].
6. Ярмоленко М.В. (2016). Принципи інтерактивного навчання основ фізики на основі віртуальних лабораторій, *Науковий огляд*, 9 (30), 139 – 149.
7. Устілкін В.В., Люта М.В, Розломій І.О. (2016). Дослідження мов програмування JAVA та C# для серверних платформ та робочих станцій, *Науковий огляд*, 9 (30), 5 – 13.
8. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. та ін. (2003). Загальний курс фізики: Збірник задач, *К:Техніка*, 560 с.

***References:***

1. Yarmolenko M.V. (2018). Analytically Solvable Differential Diffusion Equations Describing the Intermediate Phase Growth, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, 40 (9), 1201-1207.

2. Yarmolenko M.V. (2018). Intermediate phase cone growth kinetics along dislocation pipes inside polycrystal grains, *AIP Advances*, 8(9), 095202- 1–095202-5.

3. Yarmolenko M.V., Gusak A.M., Gurov K.P. (1993). A model of growth of an intermediate phase in bi- and polycrystals, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 65(3), 876 – 881.

4. Gusak A.M., Yarmolenko M.V. (1993). A simple way of describing the diffusion phase growth in cylindrical and spherical samples, *Journal of Applied Physics*., 73 (10), 4881-4884.

5. Yarmolenko M. V. (1997). Describing the Diffusion Phase Growth in Polycrystals: Analytical Solution, *Defect and Diffusion Forum*, 143-147, 1567- 1572.

6. Yarmolenko M.V. (2016). Pryntsypy interaktyvnogo navchannia osnov fizyky na osnovi virtual'nykh laboratoriy [Principles of interactive learning fundamentals of Physics based on virtual laboratories], *Scientific review*, 9 (30), 139 – 149. [in Ukrainian].

7. Ustilkin V.V., Lyuta M.V., Rozlomiy I.O. (2016). Doslidjennia mov programuvannia JAVA ta C# dlia servernykh platform ta robochych stantsiy [Research programming languages Java and C# for server platforms and workstation], *Scientific review*, 9 (30), 5 – 13. [in Ukrainian].

8. Garkusha I.P., Gorbachuk I.T., Kurinny V.P. and others (2003). Zagalniy kurs fizyky: Zbirnyk zadach [General Physics Course: Collection of Problems], *Kyiv:Tekhnika*, 560 p. [in Ukrainian].