УДК 004.021

КВАЗІНЬТОНІВСЬКА МОДЕЛЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КРОКУ ГРАДІЄНТНОГО СПУСКУ

В.М. Яхно, к.т.н., доцент
Київський національний університет технологій та дизайну

Ключові слова: яружні функції, крок алгоритмів спуску, яружний крок алгоритмів спуску, швидкість збіжності алгоритмів спуску.

Найбільш ефективними чисельними методами розв'язання класичної задачі математичного аналізу *задача відшукання безумовного екстремуму диференційовної функції* $z=f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in E^n,\ f(\boldsymbol{x})\in E^1$ є методи що використовують квадратичні моделі для покращення значення функції на кожному кроці (явно ньютонівські та квазіньютонівські методи, опосередковано метод спряжений градієнтів). Початкова складна функція, що мінімізується, замінюється в околиці розглянутої точки на кожній ітерації параболоїдом обертання, який з побудови, э дотичним до графіка цієї функції в обраній точці і повинен також мажорувати вихідну функцію. Далі вихідна задача мінімізації замінюється завданням мінімізації побудованого параболоїда. Завдяки властивостям модельної функції ця задача вирішується явно (здійснюється крок алгоритму). Знайдене рішення задачі приймається за нову точку (положення методу) і процес повторюється. В залежності від того, якими властивостями володіла початкова функція (властивості гладкості, опуклості), встановлюються оцінки на швидкість збіжності описаної процедури. Для квадратичних функцій ці методи дозволяють отримати розв'язок задачі за одну або n (розмір простору аргументів) ітерацій. Для опуклих функцій ці методи також є ефективними. Для відомої тестової задачі знаходження мінімуму функції Розенброка лінії рівня якої зображені на рис. 1. Корисність цих методів дуже сумнівна. В точці А ньютонівський метод визначає напрям до максимуму функції і є протилежним антиградієнту.

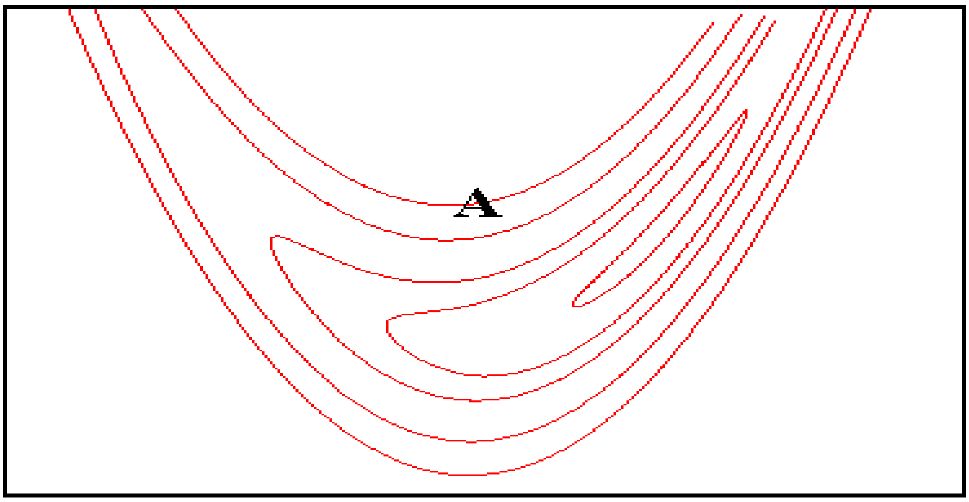

Рисунок 1 - Графік ліній рівня функції Розенброка

Видається корисним метод який для функцій подібних функції Розенброка має властивості не гірші ніж градієнтний спуск і демонструє якості квазіньтонівских методів для квадратичних функцій. Навіть якщо кількість обчислень на кожній ітерації Відповідає складності квазіньтонівских методів. Можливості методу, що пропонується демонструють рис.2 та 3.

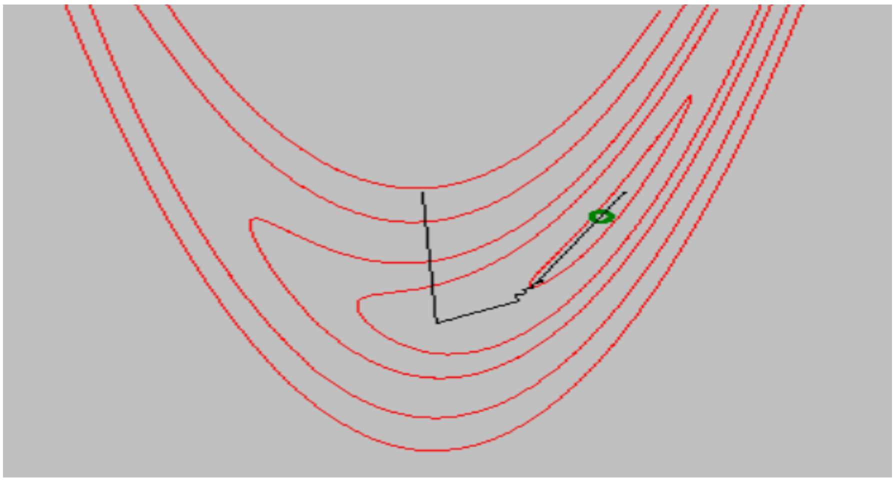

Рисунок 2 - Траєкторія спуску градієнтного методу кроку для якого ньютонівський напрямок максимально наближений до градієнту. Лінії рівня функції Розенброка.

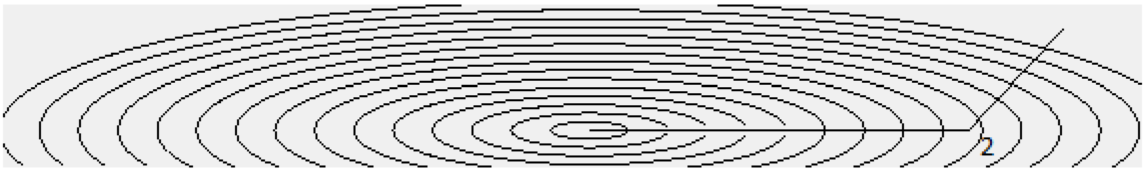

Рисунок 3 - Траєкторія спуску градієнтного методу кроку для якого ньютонівський напрямок максимально наближений до градієнту. Лінії рівня квадратична функція.

На малюнку 2 в точці 2 напрямок антиградієнту збігається з ньютонівським напрямком спуску $-f''(x)^{-1} f'(x)$і тому задовольняє рівнянню $f'(x) = f'(x) f''(x)^{-1}$. Це значить, що антиградієнт в цій точці є власним вектором матриці $f''(x)^{-1}$. Матриці $f''(x)^{-1}$ і $f''(x)$ мають однакові власні вектори і це можна використати для визначення кроку – крок h, що визначив точку 2 повинен бути таким, щоб кут між векторами $f'(x_k - hf'(x_k))$ і $f'(x_k - hf'(x_k)) f''(x)$ був мінімальним. В даному випадку, під час роботи алгоритму використовувалась не матриця других похідних а квазіньтонівска матриця рангу 1. Значення матриці визначались під час пошуку кроку hк. На кожній ітерації пошук матриці починався спочатку.

Список використаних джерел

1. Гасников А. В Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска. / А. В. Гасников //Издательство МФТИ, 2018, 141 с.

2. Нестеров Ю.Е. Методы выпуклой оптимизации. / Ю.Е. Нестеров //Издательство МЦНМО, 2010, 241 с.