

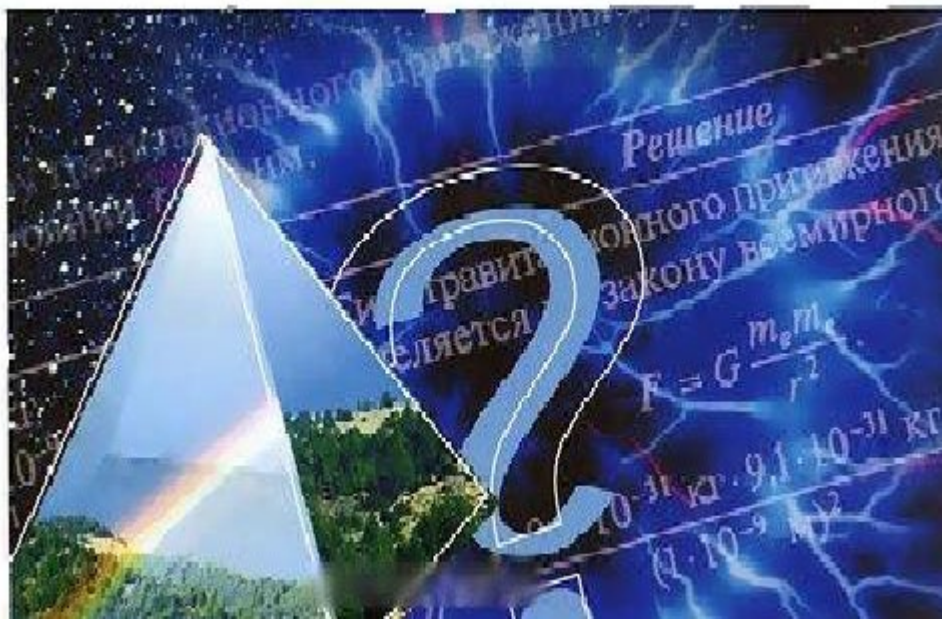
К. В. Авдонін, О. В. Ковальчук

# ФІЗИКА

Електромагнетизм. Геометрична і хвильова оптика

Частина IV

Навчальний посібник



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ТЕХНОЛОГІЙ ТА ДИЗАЙНУ

К. В. Авдонін, О. В. Ковальчук

**ФІЗИКА**  
**Частина IV. Електромагнетизм.**  
**Геометрична і хвильова оптика**

Навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою Київського національного  
університету технологій та дизайну  
для студентів денної, заочної та заочно-дистанційної форм  
здобуття освітнього ступеня «Бакалавр»  
усіх напрямів підготовки

Київ  
2021

УДК 537.8:535.31(075.8)  
А18

*Рецензенти:*

*Охріменко О.Б.* – д-р фіз.-мат. наук, пр. н. с. Інституту фізики напівпровідників ім. В.Є. Лашкарьова НАН України;

*Гайворонський В.Я.* – д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. лаб. нелінійно-оптичної діагностики новітніх матеріалів Інституту фізики НАНУ;

*Олейнікова І.В.* – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної фізики та вищої математики КНУТД.

Рекомендовано Вченою радою Київського національного університету технологій та дизайну як навчальний посібник для студентів денної, заочної та заочно-дистанційної форм здобуття освітнього ступеня «Бакалавр» усіх напрямів підготовки (протокол № 5 від 15 грудня 2021)

**Авдонін К. В., Ковальчук О. В.**

А18 Фізика. Ч. 4: Електромагнетизм. Геометрична і хвильова оптика: навч. посіб. Київ : КНУТД, 2021. 232 с.

ISBN 978-617-7506-95-8

При підготовці навчального посібника автори врахували основні зміни у програмі та тенденції розвитку дисципліни «Фізика». Четверта частина посібника містить розділи «Електромагнетизм», «Геометрична і хвильова оптика». У даному посібнику викладення матеріалу дисципліни супроводжується більш детальними поясненнями, ніж в інших посібниках з фізики. Кожен розділ завершується контрольними питаннями для самоконтролю, прикладами розв'язку задач і підсумковою таблицею, яка у стислій формі містить розглянуті у розділі основні формули і закони, що буде сприяти підвищенню ефективності самостійної роботи студентів.

УДК 537.8:535.31(075.8)

ISBN 978-617-7506-95-8

© К. В. Авдонін, О. В. Ковальчук, 2021

© КНУТД, 2021

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
<b>РОЗДІЛ 1. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ</b>	
1.1. Магнітне поле та його основні характеристики.....	6
1.2. Закон Біо-Савара-Лапласа та приклади його застосування.....	9
1.3. Закон повного струму та приклади його застосування.....	23
1.4. Закон Ампера. Контур зі струмом в магнітному полі.....	30
1.5. Сила Лоренца. Рух зарядженої частинки в однорідних електричних та магнітних полях.....	34
1.6. Магнітне поле на межі двох середовищ.....	48
1.7. Закон електромагнітної індукції. Правило Ленца.....	54
1.8. Самоіндукція. Коефіцієнт самоіндукції.....	55
1.9. Енергія і об'ємна густина енергії магнітного поля.....	56
1.10. Струми замикання і розмикання.....	57
1.11. Власні коливання в електричному контурі.....	60
1.12. Затухаючі коливання в електричному контурі.....	63
1.13. Вимушені коливання в електричному контурі.....	68
1.14. Струм зміщення. Узагальнений закон повного струму.....	71
1.15. Рівняння Максвелла.....	73
1.16. Електромагнітні хвилі, як наслідок з рівнянь Максвелла.....	77
1.17. Загальні властивості електромагнітних хвиль.....	80
1.18. Ефект Доплера для електромагнітних хвиль.....	88
Підсумкова таблиця розділу «Електромагнетизм».....	93
Контрольні питання.....	102
Приклади розв'язку задач з розділу «Електромагнетизм».....	104

## РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНА І ХВИЛЬОВА ОПТИКА

2.1. Закони заломлення і відбиття світла.....	109
2.2. Поняття оптичного зображення. Побудова зображення у плоскому дзеркалі.....	113
2.3. Принцип найменшого часу Ферма.....	115
2.4. Побудова зображення при заломленні та відбитті світла.....	117
2.5. Заломлення та відбиття світла на сферичній поверхні. Тонкі лінзи і сферичні дзеркала.....	124
2.6. Основні поняття фотометрії.....	152
2.7. Коефіцієнт відбиття при нормальному падінні світла на межу розділу двох прозорих середовищ.....	159
2.8. Когерентні хвилі. Інтерференція світла.....	164
2.9. Принцип Гюйгенса – Френеля. Дифракція світла.....	190
2.10. Дифракція на круглому отворі за методом Френзеля.....	191
2.11. Дифракція Фраунгофера на щілині.....	195
2.12. Поляризоване та природне світло.....	202
2.13. Закон Малюса.....	205
2.14. Явище подвійного променезаломлення.....	206
2.15. Штучне подвійне променезаломлення.....	208
2.16. Поляризація при відбитті та заломленні.....	209
2.17. Взаємодія світла з речовиною.....	219
2.18. Хвильовий пакет. Групова швидкість.....	222
Приклади розв'язку задач на тему «Геометрична і хвильова оптика».....	224
<b>Бібліографічний список.....</b>	<b>229</b>
<b>Предметний покажчик.....</b>	<b>230</b>

## ВСТУП

У першому розділі посібника розглядається: магнітне поле, основні закони і характеристики, що описують магнітне поле, явище електромагнітної індукції, змінний електричний струм, електричні коливання у контурі, взаємозв'язок електричного і магнітного поля, рівняння Максвелла, наслідком з яких є існування електромагнітних хвиль, загальні властивості електромагнітних хвиль та ефект Доплера для електромагнітних хвиль.

Детально розглядається також рух заряджених у магнітних та електричних полях. При викладенні матеріалу використовується міжнародна система одиниць виміру СІ. У другому розділі посібника розглядається основні закони геометричної та хвильової оптики і межі їх застосування. Оптика є розділом фізики, в якому вивчають властивості і природу світла а також взаємодію світла з речовиною. У сучасній оптиці під поняттям світло розуміють електромагнітні хвилі не тільки видимого діапазону довжин хвиль:  $4 \cdot 10^{-7} - 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , а ще й досить широкі області інфрачервоного і ультрафіолетового випромінювання, що межують з діапазоном видимого світла. Спектр електромагнітних хвиль прийнято ділити на радіохвилі, інфрачервоне, видиме, ультрафіолетове, рентгенівське і гама-випромінювання:

1) Радіохвилі: якщо  $\lambda > 10 \text{ км}$ , то це наддовгі радіохвилі:  $10 - 1 \text{ км}$ , це довгі радіохвилі;  $10^3 - 10^2 \text{ м}$ , це середні радіохвилі;  $100 - 10 \text{ м}$ , це короткі радіохвилі;  $\lambda < 10 \text{ м}$ , це ультракороткі радіохвилі. 2) Оптичний діапазон складається з трьох частин: інфрачервоне випромінювання:  $2 \cdot 10^{-3} - 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , за умовну межу між інфрачервоними хвилями і радіохвилями беруть електромагнітну хвилю, довжиною  $2 \text{ мм}$ ; видиме світло, довжина хвилі якого знаходиться в межах:  $4 \cdot 10^{-7} - 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ; ультрафіолетове випромінювання:  $4 \cdot 10^{-7} - 10^{-8} \text{ м}$ . 3) Умовний діапазон для рентгенівських променів складає:  $5 \cdot 10^{-8} - 7,6 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ . 4) Для гама-променів:  $\lambda < 10^{-11} \text{ м}$ .

В розділі «Оптика» розглянута сутність і теорія таких головних, хвильових явищ, як інтерференція, дифракція, поляризація та дисперсія світла.

У посібнику розглянуті також основні закони геометричної оптики: закони заломлення та відбиття світла і як вони впливають з хвильової природи світла, побудова зображень в оптичних системах.

Окрім цього, у посібнику приділена увага питанням взаємодії світла з речовиною.

# РОЗДІЛ 1. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

## 1.1. Магнітне поле та його основні характеристики.

Навколо нерухомої, зарядженої частинки існує електростатичне поле, яке є посередником взаємодії між нерухомими, зарядженими частинками. Але, якщо заряджена частинка почне рухатись, то навколо рухомої, зарядженої частинки, як показав експеримент, виникає інше поле, відмінне від електростатичного поля, яке буде діяти на інші рухомі, заряджені частинки.

**Магнітне поле** – особливий стан простору навколо рухомої, зарядженої частинки, який є посередником взаємодії між рухомими, зарядженими частинками.

Тобто, магнітне поле виникає навколо рухомого заряду і діє воно тільки на рухомі заряди, на нерухомі заряди магнітне поле не діє. Магнітне поле є релятивістським ефектом, пов'язаним з рухом заряду. Далі буде показано, що електричні і магнітні поля тісно пов'язані між собою.

Магнітне поле, у даній точці простору, має дві основні, силові характеристики:

1) **Вектор індукції магнітного поля**, який будемо позначати через  $\vec{B}$ , одиниця виміру індукції магнітного в системі СІ:  $[B] = Tл$ .

2) **Напруженість магнітного поля**, яку будемо позначати через  $\vec{H}$ , одиниця виміру напруженості магнітного в системі СІ:  $[H] = \frac{A}{м}$ .

Магнітне поле не потенціальне, для нього не існує потенціальна енергія. Тому, на відміну від електричного, магнітне поле не має енергетичної характеристики. Силові характеристики магнітного поля, у даній точці простору, пов'язані між собою співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad (1.1)$$

де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}$  - магнітна постійна;  $\mu$  - магнітна проникливість середовища.

**Магнітна проникливість середовища** – безрозмірна фізична величина, яка характеризує вплив середовища на магнітне поле. Вона дорівнює відношенню модуля індукції магнітного поля у середовищі  $B_{серед}$  до модуля індукції магнітного поля у вакуумі  $B_{вакуум}$ :

$$\mu = \frac{B_{серед}}{B_{вакуум}}. \quad (1.2)$$

В залежності від значення магнітної проникливості середовища всі речовини поділяють на три групи: діамагнетики, парамагнетики і феромагнетики.

Для діамагнетиків  $\mu < 1$ , але за модулем близька до одиниці. До діамагнетиків відносяться інертні гази, вода, мідь, свинець, срібло, золото та багато інших речовин.

Для парамагнетиків  $\mu > 1$ , але за модулем теж близька до одиниці. До парамагнетиків відносяться магній, алюміній, хром, марганець, кисень, літій, уран та інші речовини.

Для феромагнетиків магнітна проникливість набагато більша за одиницю, порядку декількох тисяч одиниць. До феромагнетиків відносяться залізо і сплави заліза.

Засобом зображення магнітного поля у просторі є силові лінії магнітного поля, приклад силової лінії магнітного поля показано на рисунку 1.

**Силова лінія магнітного поля** – лінія, для якої напрям дотичної, проведеної до довільної її точки, збігається з напрямом вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  або з напрямом вектора індукції магнітного поля  $\vec{B}$  у точці лінії, до якої проведена дотична.

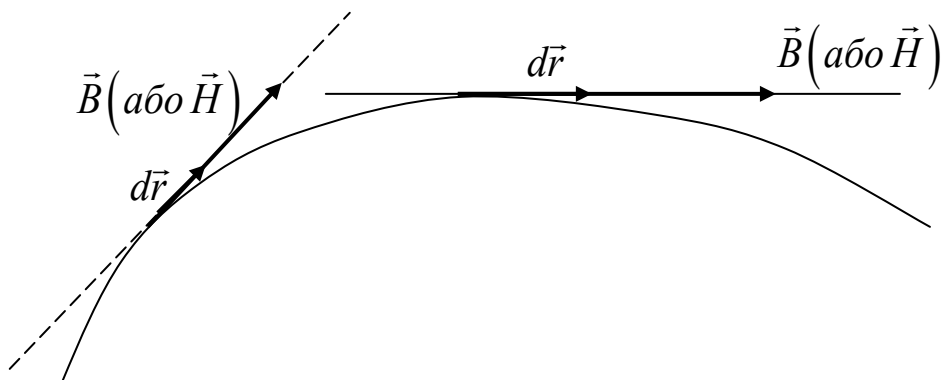


Рис. 1.

Рівняння для силової лінії магнітного поля можна отримати використовуючи паралельність векторів  $d\vec{r}$  і  $\vec{B}$  (або  $\vec{H}$ ). Звідки випливає, що їх векторний добуток дорівнює нулю:

$$[\vec{B}; d\vec{r}] = 0 \quad (1.3)$$

Представляючи векторний добуток (1.3) у вигляді детермінанту знаходимо рівняння силової лінії:



$$[\vec{B}; d\vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{i}(B_y dz - B_z dy) + \vec{j}(B_z dx - B_x dz) + \vec{k}(B_x dy - B_y dx) = 0 \quad . \quad (1.4)$$

Вектор у лівій частині рівності (1.4) дорівнює нулю тільки при рівних нулю множниках біля одиничних базисних векторах, тому:

$$\begin{cases} B_y dz - B_z dy = 0 \\ B_z dx - B_x dz = 0 \\ B_x dy - B_y dx = 0 \end{cases} \quad . \quad (1.5)$$

⇓

$$\begin{cases} \frac{dz}{dy} = \frac{B_z}{B_y} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{B_z}{B_x} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} \end{cases} \quad . \quad (1.6)$$

Оскільки одне з трьох рівнянь у системи (1.6) може бути отримане з двох інших рівнянь, то системою диференціальних рівнянь, розв'язками якої будуть рівняння силових ліній магнітного поля є система тільки з двох рівнянь системи (1.6), наприклад:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{B_z}{B_x} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} \end{cases} \quad . \quad (1.7)$$

Одержання рівнянь силових ліній магнітного поля повністю аналогічне до отримання рівнянь силових ліній електричного поля (див. частина 3, вираз (1.9)).

## 1.2. Закон Біо-Савара-Лапласа та приклади його застосування.

Навколо провідника, по якому проходить електричний струм, існує магнітне поле. Оскільки, за визначенням електричного струму, вздовж провідника впорядковано рухаються електрони і навколо рухомих електронів існує магнітне поле. Навколо провідників різної форми, по яких проходить електричний струм, магнітне поле буде різним.

Введемо поняття елемент електричного струму.

**Елемент електричного струму** – нескінченно малий вектор, модуль якого дорівнює добутку сили струму  $I$  на нескінченно малу, напрямлену ділянку провідника  $d\vec{l}$ , напрям ділянки провідника збігається з напрямом електричного струму у провіднику.

Позначати елемент струму будемо через  $I d\vec{l}$ .

Закон Біо-Савара-Лапласа дозволяє знайти індукцію магнітного поля, створеного елементом електричного струму, в обраній точці простору.

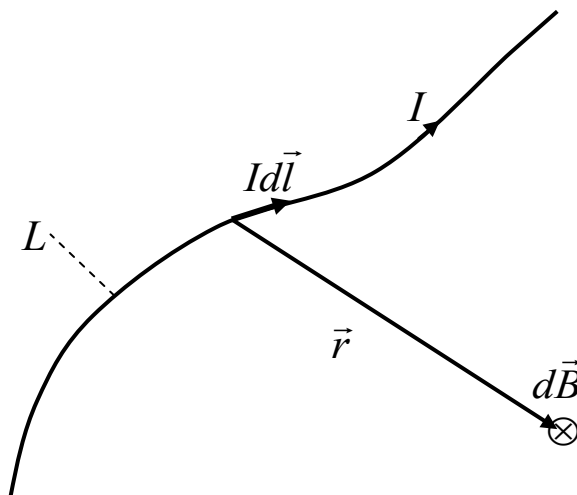


Рис. 2.

**Закон Біо-Савара-Лапласа** – індукція магнітного поля, створеного елементом електричного струму, у даній точці простору дорівнює:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[Id\vec{l}; \vec{r}]}{r^3} . \quad (1.8)$$

Положення вибраної точки простору, відносно елементу струму, визначається вектором  $\vec{r}$ , який показано на рисунку 2, через  $r$  позначений його модуль.

Індукція  $d\vec{B}$  магнітного поля, створеного елементом струму у даній точці простору, за означенням векторного добутку векторів, буде

перпендикулярною до елементу струму  $Id\vec{l}$  і до вектора  $\vec{r}$ . Тобто, індукція магнітного поля  $d\vec{B}$  буде перпендикулярною до рисунку і напрямлена «в рисунок».

Для зображення векторів, перпендикулярних до рисунку, будемо використовувати такі позначення:  $\otimes$  - вектор, напрямлений «в рисунок»;  $\ominus$  - вектор, напрямлений «з рисунку»

Для знаходження вектора індукції магнітного поля, створеного провідником зі струмом, потрібно розбити провідник на елементи струму і знайти геометричну суму всіх векторів індукції  $d\vec{B}$ , створених елементами струму. Оскільки, сума нескінченно малих величин це інтеграл, то індукція магнітного поля, створеного провідником зі струмом дорівнює:

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[Id\vec{l}; \vec{r}]}{r^3} . \quad (1.9)$$

Таким чином, використовуючи закон Біо-Савара-Лапласа, можна знаходити індукцію магнітного поля, створеного провідником зі струмом, довільної форми.

З закону Біо-Савара-Лапласа (1.8) можна знайти індукцію магнітного поля одного точкового заряду  $q$ , що рухається зі швидкістю  $\vec{v}$ .

Якщо за малий час  $dt$  поперечний переріз провідника перетинає тільки одна заряджена частинка, то сила струму, за визначенням буде

дорівнювати  $I = \frac{q}{dt}$ . Тоді, елемент електричного струму буде таким:

$$Id\vec{l} = \frac{q}{dt} d\vec{l} = q \frac{d\vec{l}}{dt} = q\vec{v} ,$$

тобто:  $Id\vec{l} = q\vec{v} . \quad (1.10)$

Підставляючи у закон Біо-Савара-Лапласа (1.8) елемент струму у вигляді (1.10) і, замінюючи  $d\vec{B} \rightarrow \vec{B}$ , одержимо:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v}; \vec{r}]}{r^3} . \quad (1.11)$$

Одержаний вираз (1.11) визначає індукцію магнітного поля, створеного рухомим точковим зарядом, у точці простору, положення якої відносно заряду визначене вектором  $\vec{r}$ , проведеним від точкового заряду до обраної точки простору.

### **Приклади застосування закону Біо-Савара-Лапласа.**

1) Магнітне поле прямолінійного провідника зі струмом.

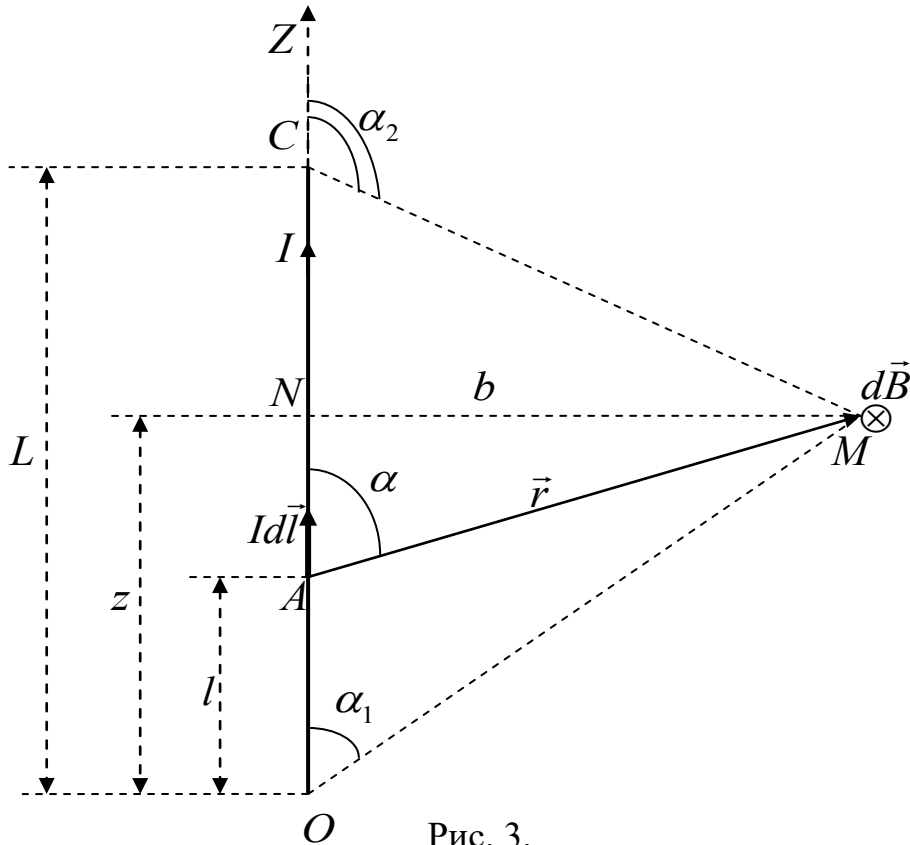


Рис. 3.

Використовуючи закон Біо-Савара-Лапласа знайдемо індукцію магнітного поля у точці  $M(x, y, z)$ , створену електричним струмом, силою  $I$ , що проходить по прямолінійному провіднику, довжиною  $L$ .

Виберемо напрям осі координат  $Z$  вздовж провідника зі струмом, а початок системи координат у початку провідника зі струмом, як показано на рисунку 3. Тоді, проекції вектора елемента струму  $Id\vec{l}$  на вісі координат  $X$  і  $Y$  дорівнюватимуть нулю а проекція на вісь  $Z$  буде рівна його модулю:

$$\left( Id\vec{l} \right)_x = 0 ; \left( Id\vec{l} \right)_y = 0 ; \left( Id\vec{l} \right)_z = Idl ; \quad (1.12)$$

відстань  $MN$  від точки  $M$  до провідника, яка на рисунку 2 позначена через  $b$ , буде такою:

$$b = \sqrt{x^2 + y^2} ; \quad (1.13)$$

проекції вектора  $\vec{r}$  на вісі координат будуть такими:

$$r_x = x ; r_y = y ; r_z = z - l ; \quad (1.14)$$

де  $l$  - відстань від кінця провідника до початку елемента струму.

Модуль вектора  $\vec{r}$  дорівнює:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2} = \sqrt{b^2 + (z-l)^2}, \quad (1.15)$$

Знайдемо векторний добуток елемента струму  $I d\vec{l}$  і вектора  $\vec{r}$ :

$$\left[ I d\vec{l}; \vec{r} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & Idl \\ x & y & z-l \end{vmatrix} = -\vec{i}yIdl + \vec{j}xIdl. \quad (1.16)$$

Підставимо векторний добуток (1.16) і модуль вектора (1.15) у закон Біо-Савара-Лапласа (1.8):

$$d\vec{B} = -\vec{i} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{yIdl}{\left(b^2 + (z-l)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \vec{j} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{xIdl}{\left(b^2 + (z-l)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.17)$$

Інтегруючи вираз (1.17) по всій довжині провідника (відстань  $l$  змінюється в межах від 0 до  $L$ ) знаходимо вектор індукції магнітного поля у точці  $M(x, y, z)$ .

$$\vec{B} = -\vec{i} \frac{\mu\mu_0 I y}{4\pi} \int_0^L \frac{dl}{\left(b^2 + (z-l)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \vec{j} \frac{\mu\mu_0 I x}{4\pi} \int_0^L \frac{dl}{\left(b^2 + (z-l)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.18)$$

Обчислимо окремо інтеграл, який двічі зустрічається у виразі (1.18), виконуючи заміну змінної інтегрування (від інтегрування по  $l$  перейдемо до інтегрування по куту  $\alpha$ , який показано на рисунку 3):

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{dl}{\left(b^2 + (z-l)^2\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left| \begin{array}{l} z-l = b \cdot \operatorname{ctg} \alpha \\ dl = \frac{bd\alpha}{\sin^2 \alpha} \end{array} \right| = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin^3 \alpha \cdot b d\alpha}{b^3 \cdot \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{1}{b^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = -\frac{1}{b^2} \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{1}{b^2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (1.19) \end{aligned}$$

Підставляючи інтеграл (1.19) у формулу (1.18) знаходимо вектор індукції магнітного поля у точці  $M(x, y, z)$  у вигляді:

$$\vec{B} = -\vec{i} \frac{\mu\mu_0 I y}{4\pi b^2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + \vec{j} \frac{\mu\mu_0 I x}{4\pi b^2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (1.20)$$

З отриманого виразу (1.20) випливають значення проєкцій вектора  $\vec{B}$  на вісі координат:

$$B_x = -\frac{\mu\mu_0 I y}{4\pi b^2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2); \quad B_y = \frac{\mu\mu_0 I x}{4\pi b^2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2); \quad B_z = 0. \quad (1.21)$$

Тоді, модуль вектора індукції магнітного поля у точці  $M(x, y, z)$  дорівнює:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \frac{\mu\mu_0 I \sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi b^2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \\ &= \frac{\mu\mu_0 I b}{4\pi b^2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2); \end{aligned}$$

тобто:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (1.22)$$

Якщо прямолінійний провідник зі струмом нескінченно довгий, тобто  $L \rightarrow \infty$ , то граничні кути набувають значень:  $\alpha_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = \pi$ . Для цього випадку модуль вектора індукції магнітного поля дорівнює:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi b},$$

тобто:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi b}. \quad (1.23)$$

Підставляючи проєкції вектора  $\vec{B}$  у вигляді (1.21) у систему рівнянь (1.7) одержимо рівняння силових ліній магнітного поля прямолінійного провідника зі струмом:

$$\begin{cases} dz = 0 \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = const \\ d(x^2 + y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = const \\ x^2 + y^2 = const \end{cases}. \quad (1.24)$$

З системи рівнянь (1.24) випливає, що силові лінії магнітного поля, створеного прямолінійним провідником зі струмом, це замкнені кола, площина яких перпендикулярна до провідника, центри кіл знаходяться на провіднику.

На рисунку 4а зображений приклад силової лінії магнітного поля прямолінійного провідника зі струмом.

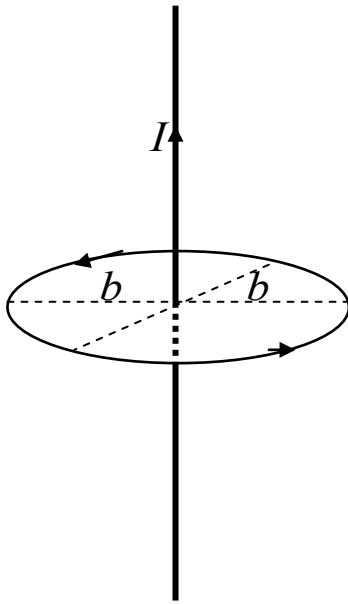


Рис. 4а.

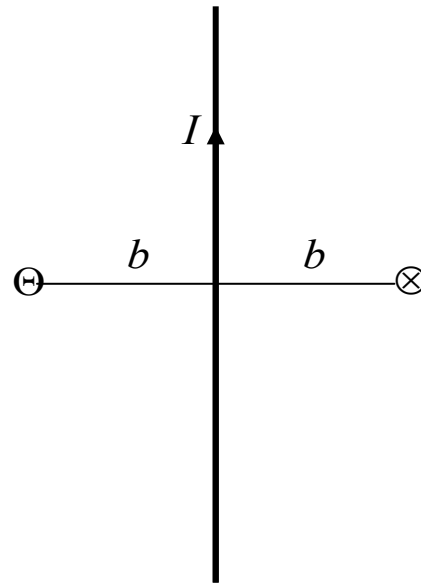


Рис.4б.

При зображенні силових ліній магнітного поля часто користуються схематичним зображенням силової лінії магнітного поля у вигляді проекції кола на площину рисунку, з позначеними напрямками граничних ділянок силової лінії, як показано на рисунку 4б.

Силові лінії будь якого магнітного поля завжди замкнені, мають вихровий характер.

## 2) Магнітне поле на осі колового провідника зі струмом.

Виберемо початок осей координат у центрі колового струму, напрям осі координат  $X$  виберемо вздовж осі колового провідника зі струмом. Тоді, для всіх точок на осі колового провідника відмінною від нуля буде тільки координата  $x$ .

Знайдемо індукцію магнітного поля, створеного коловим провідником радіусу  $R$ , по якому протікає електричний струм силою  $I$ , у точці  $M(a;0;0)$ , що знаходиться на відстані  $a$  від центру колового провідника, як показано на рисунку 5.

Проекції вектора  $\vec{r}$ , що з'єднує початок елемента струму з точкою  $M$ , як видно з рисунку 5, будуть такими:

$$r_x = a ; r_y = -R \cos \alpha ; r_z = -R \sin \alpha . \quad (1.25)$$

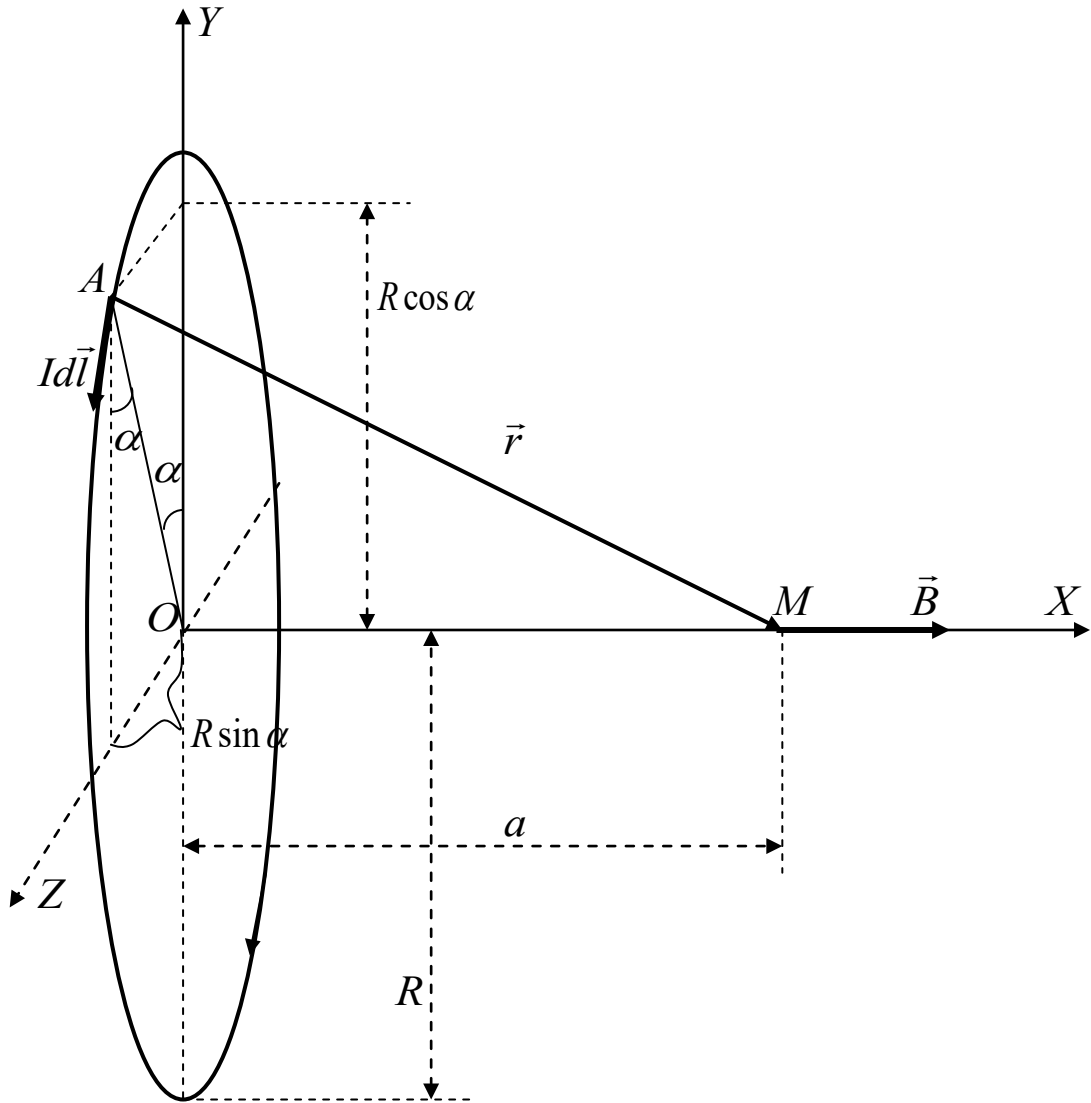


Рис. 5.

Тоді, модуль вектора  $\vec{r}$  дорівнює:

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{a^2 + R^2} \quad , \quad (1.26)$$

Проекції вектора елемента електричного струму на вісі координат, як видно з рисунку 6, дорівнюють:

$$\left( Id\vec{l} \right)_x = 0 \quad ; \quad \left( Id\vec{l} \right)_y = -Idl \sin \alpha \quad ; \quad \left( Id\vec{l} \right)_z = Idl \cos \alpha \quad . \quad (1.27)$$



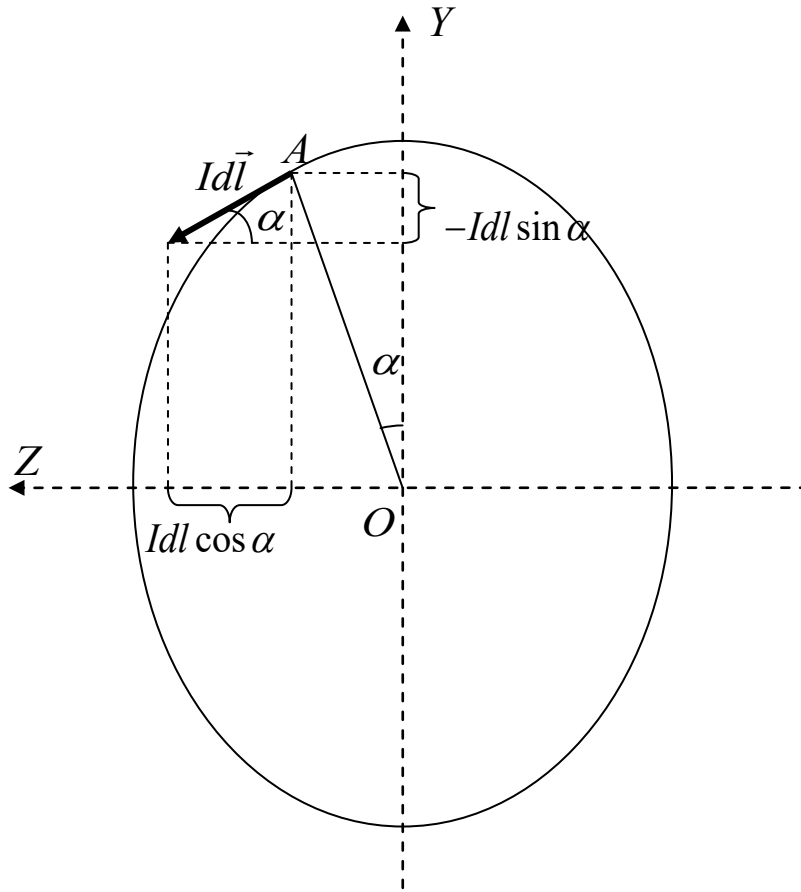


Рис. 6.

Знайдемо векторний добуток елемента струму  $Id\vec{l}$  і вектора  $\vec{r}$  :

$$[Id\vec{l}; \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -Idl \sin \alpha & Idl \cos \alpha \\ a & -R \cos \alpha & -R \sin \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot RIdl (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \vec{j} \cdot aIdl \cos \alpha + \vec{k} \cdot aIdl \sin \alpha =$$

$$= \vec{i} \cdot RIdl + \vec{j} \cdot aIdl \cos \alpha + \vec{k} \cdot aIdl \sin \alpha \quad . \quad (1.28)$$

Підставимо векторний добуток (1.28) і модуль вектора (1.26) у закон Біо-Савара-Лапласа (1.8):

$$d\vec{B} = \vec{i} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{RIdl}{(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \vec{j} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{aIdl \cos \alpha}{(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \vec{k} \cdot \frac{aIdl \sin \alpha}{(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad .(1.29)$$

Інтегруючи вираз (1.29) по всій довжині провідника (відстань  $l$  змінюється в межах від 0 до  $L$ ) знаходимо вектор індукції магнітного поля у точці  $M(a, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned} \vec{B} = & \vec{i} \frac{\mu\mu_0 IR}{4\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^L dl + \vec{j} \frac{\mu\mu_0 aI}{4\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^L \cos \alpha dl + \\ & + \vec{k} \frac{\mu\mu_0 aI}{4\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^L \sin \alpha dl \end{aligned} \quad (1.30)$$

Інтеграл у першому доданку виразу (1.30) дорівнює довжині кола, тобто:  $\int_L dl = 2\pi R$ .

В інтегралах другого і третього доданку виразу (1.30) виконаємо заміну змінної інтегрування: від інтегрування по  $l$  перейдемо до інтегрування по куту який показано на рисунку 6, використовуючи зв'язок  $dl = R d\alpha$ , тоді:

$$\begin{aligned} \vec{B} = & \vec{i} \frac{\mu\mu_0 IR \cdot 2\pi R}{4\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \vec{j} \frac{\mu\mu_0 aIR}{4\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha + \\ & + \vec{k} \frac{\mu\mu_0 aIR}{4\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = \\ = & \vec{i} \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \vec{j} \frac{\mu\mu_0 IaR}{4\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \sin \alpha \Big|_0^{2\pi} - \vec{k} \frac{\mu\mu_0 IaR}{4\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \alpha \Big|_0^{2\pi} = \\ = & \vec{i} \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Таким чином, вектор індукції магнітного поля у точці  $M$  дорівнює:

$$\vec{B} = \vec{i} \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.31)$$

З отриманого виразу (1.31) випливають значення проекцій вектора  $\vec{B}$  на вісі координат:

$$B_x = \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} ; \quad B_y = 0 ; \quad B_z = 0 , \quad (1.32)$$

модуль вектора індукції магнітного поля у точці  $M$  дорівнює:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \Rightarrow B = \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} . \quad (1.33)$$

Оскільки точка  $M$  на осі колового провідника зі струмом була вибрана довільно, то у будь якій точці на осі колового провідника вектор індукції магнітного поля буде напрямлений вздовж осі колового струму. Використовуючи формулу (1.33) можна знайти індукцію магнітного поля у центрі колового провідника зі струмом. Для цього, у формулі (1.33), потрібно покласти  $a = 0$ :

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R} . \quad (1.34)$$

Для замкненого провідника, по якому проходить електричний струм (провідного контуру зі струмом), існує поняття магнітний момент.

Позначимо через  $S$  - площу ділянки площини, яку охоплює замкнений провідний контур зі струмом, через  $I$  - силу електричного струму у провідному, провідному контурі, через  $\vec{n}$  - вектор одиничної нормалі до ділянки площини. Вектор одиничної нормалі  $\vec{n}$  напрямлений таким чином, що б з його вершини електричний струм у провідному контурі спостерігався проти годинникової стрілки, як показано на рисунку 7.

**Магнітний момент** – вектор, який дорівнює добутку одиничної нормалі до площини провідного контуру, площі контуру і сили струму, що проходить через провідний контур:

$$\vec{p}_m = \vec{n}SI \quad (1.35)$$

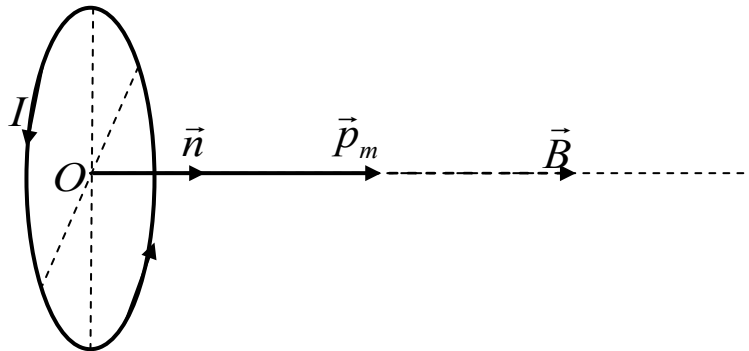


Рис. 7.

Напрямок магнітного моменту збігається з напрямком індукції магнітного поля на осі провідного контуру.

Використовуючи поняття магнітний момент вектор індукції магнітного поля на осі колового провідника зі струмом, що визначається виразом (1.31), можна представити в іншому вигляді.

Для випадку, зображеного на рисунку 5, вектор одиничної нормалі до площини провідного контуру дорівнює  $\vec{n} = \vec{i}$ , а площа провідного контуру дорівнює  $S = \pi R^2$ , тоді:

$$\vec{B} = \vec{i} \frac{\mu\mu_0 I R^2}{2(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \vec{n} \frac{\mu\mu_0 I \pi R^2}{2\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{тобто:} \quad \vec{B} = \frac{\mu\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.36)$$

### 3) Магнітне поле на осі соленоїда (катушки).

Позначимо радіус соленоїда через  $R$ , довжину соленоїда через  $l$ , кількість витків у соленоїді через  $N$ . Введемо поняття кількість витків на одиницю довжини, яку будемо позначати через  $n$ .

**Кількість витків на одиницю довжини** – відношення кількості витків у соленоїді до його довжини:

$$n = \frac{N}{l}. \quad (1.37)$$

Вісь координат  $X$  виберемо вздовж осі соленоїда, початок відліку координати  $R$  посередині соленоїда, як показано на рисунку 8.

Соленоїд, по якому проходить електричний струм, силою  $I$ , можна вважати неперервною сукупністю однаково напрямлених колових струмів, вісі яких збігаються. Розіб'ємо соленоїд на нескінченно малі ділянки, координату ділянки позначимо через  $x_\partial$ , довжину ділянки через  $dx_\partial$ , як показано на рисунку 7. Кількість витків  $dN$  на одній нескінченно малій ділянці можна виразити через її довжину  $dx_\partial$ , скориставшись визначенням кількості витків на одиницю довжини (1.37):

$$n = \frac{dN}{dx_\partial} \Rightarrow dN = n dx_\partial. \quad (1.38)$$

Тоді, сила колового струму  $dI$ , що протікає по нескінченно малій ділянці дорівнює:

$$dI = IdN = Indx_\partial. \quad (1.39)$$

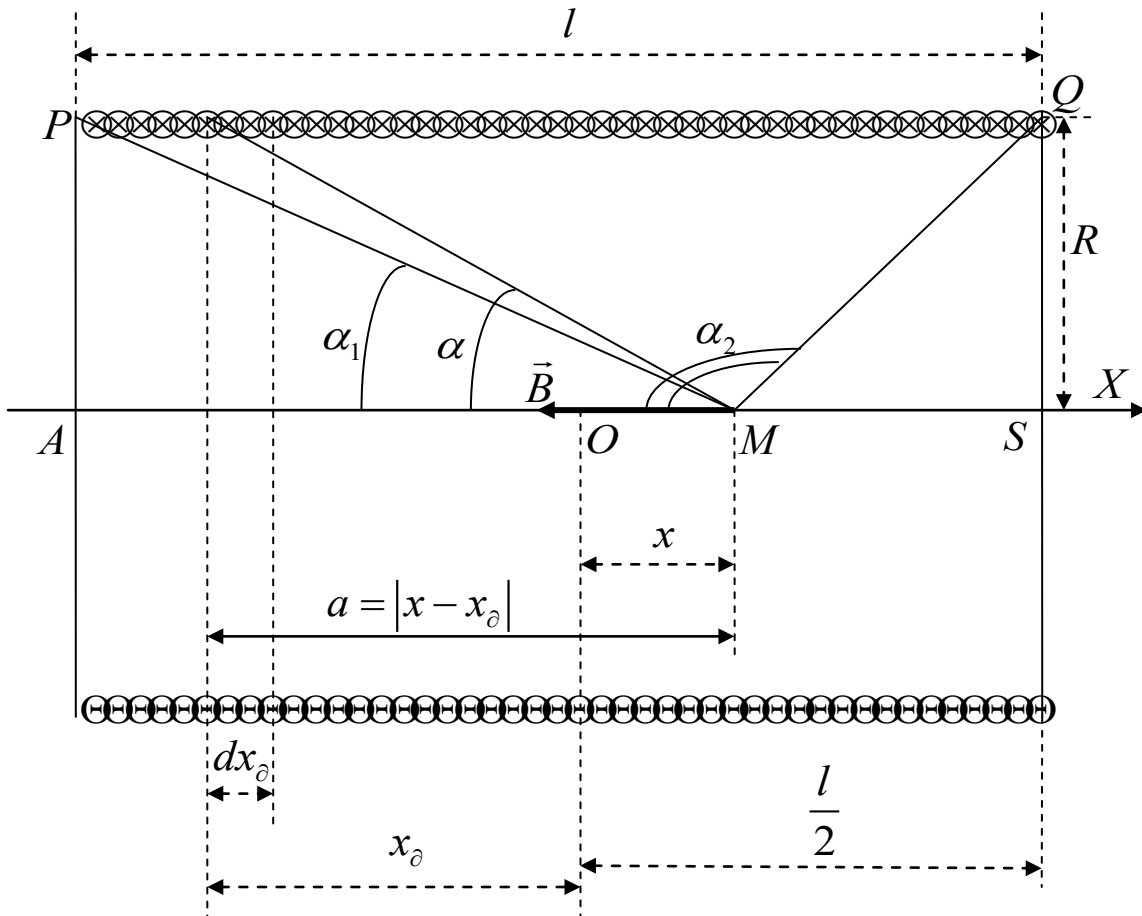


Рис.8.

Нескінченно малу ділянку соленоїда можна вважати коловим струмом. Тому, модуль індукції магнітного поля  $dB$  у точці  $M$ , створеного струмом на одній, нескінченно малій ділянці соленоїда, можна знайти з виразу (1.33), підставляючи струму у вигляді:  $I \rightarrow Indx_0$ , згідно виразу (1.39), і відстань  $a$ , між ділянкою соленоїда і точкою на осі соленоїда  $M$ , у вигляді:  $a = |x - x_0|$ . Підставляючи, одержимо:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 R^2 Indx_0}{2\left((x - x_0)^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.40)$$

Координата точки  $M$  на рисунку 8 позначена через  $x$ .

Оскільки вектори індукції  $d\vec{B}$  у точці  $M$ , створені струмами на ділянках соленоїда, паралельні між собою і напрямлені вздовж осі соленоїда, то вектор індукції сумарного магнітного поля  $\vec{B}$  у точці  $M$ ,

створеного всім соленоїдом зі струмом, теж буде напрямлений вздовж осі соленоїда а модуль сумарного вектора індукції  $\vec{B}$  буде дорівнювати сумі модулів індукцій, створених струмами на всіх ділянках соленоїда.

Інтегруючи вираз (1.40) по координаті ділянки струму  $x_\delta$ , що змінюється в межах від  $-\frac{l}{2}$  до  $+\frac{l}{2}$ , маємо:

$$B = \frac{\mu\mu_0 R^2 In}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dx_\delta}{\left((x-x_\delta)^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} . \quad (1.41)$$

Інтеграл (1.41) можна знайти, виконуючи заміну змінної інтегрування: від інтегрування по  $x_\delta$  перейдемо до інтегрування по куту  $\alpha$ , який показано на рисунку 7. Виконуючи заміну змінної інтегрування одержимо:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu\mu_0 In}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{R^2 dx_\delta}{\left((x-x_\delta)^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left| \begin{array}{l} x-x_\delta = R \operatorname{ctg} \alpha \\ dx_\delta = \frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha} \end{array} \right| = \\ &= \frac{\mu\mu_0 In}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R^3 \sin^3 \alpha d\alpha}{R^3 \sin^2 \alpha} = \frac{\mu\mu_0 In}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \\ &= -\frac{\mu\mu_0 In}{2} \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu\mu_0 In}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) , \\ \text{тобто: } B &= \frac{\mu\mu_0 In}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) . \quad (1.42) \end{aligned}$$

Косинуси граничних кутів  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , як видно з рисунку 8, дорівнюють:

$$\text{З трикутника } AMP \text{ випливає, що: } \cos \alpha_1 = \frac{\frac{l}{2} + x}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 + R^2}} . \quad (1.43)$$

З трикутника  $MSQ$  випливає, що:

$$\cos \alpha_2 = -\frac{\frac{l}{2} - x}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + R^2}} . \quad (1.44)$$

Підставляючи косинуси граничних кутів (1.43) і (1.44) у вираз (1.42) знаходимо:

$$B = \frac{\mu\mu_0 In}{2} \left( \frac{\frac{l}{2} + x}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{l}{2} - x}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + R^2}} \right) . \quad (1.45)$$

Отриманий вираз (1.45) визначає модуль індукції магнітного поля у точці на осі соленоїда зі струмом.

Якщо соленоїд зі струмом нескінченно довгий ( $l \rightarrow \infty$ ), то модуль індукції магнітного поля на його осі буде таким:

$$B = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\mu\mu_0 In}{2} \left( \frac{1 + \frac{2x}{l}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2x}{l}\right)^2 + \frac{4R^2}{l^2}}} + \frac{1 - \frac{2x}{l}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 + \frac{4R^2}{l^2}}} \right) = \mu\mu_0 In ,$$

тобто:  $B = \mu\mu_0 In$  . (1.46)

Формулу (1.46), для модуля індукції магнітного поля на осі нескінченно довгого соленоїда, можна отримати іншим шляхом, використовуючи значення граничних кутів для нескінченно довгого соленоїда:  $\alpha_1 = 0$  ;  $\alpha_2 = \pi$  . Якщо підставити значення граничних кутів у вираз (1.42), то одержимо формулу (1.46) для модуля індукції магнітного поля на осі нескінченно довгого соленоїда:

$$B = \frac{\mu\mu_0 In}{2} (\cos 0 - \cos \pi) = \mu\mu_0 nI .$$

### 1.3. Закон повного струму та приклади його застосування.

Нехай  $L$  - довільна, замкнена лінія будь якої форми (інша назва – довільний, замкнений контур). Для довільної замкненої лінії завжди можна вибрати напрямок (напрямок обходу контуру). Напрямок обходу контуру прийнято вибирати таким чином, щоб при обході контуру, обмежена контуром область, знаходилась зліва. Приклад такого напрямку обходу показаний на рисунку 9.

При існуванні у просторі магнітного поля, кожній точці замкненого контуру  $L$  буде відповідати певний вектор напруженості магнітного поля. Якщо замкнений контур розбити на нескінченно малі, напрямлені ділянки  $d\vec{l}$ , знайти скалярні добутки всіх ділянок на відповідні їм вектори напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  і просумувати знайдені скалярні добутки, то одержимо фізичну величину, яку називають циркуляцією напруженості магнітного поля, вздовж замкненого контуру.

**Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля, вздовж замкненого контуру  $L$**  - це криволінійний інтеграл, вздовж замкненого контуру  $L$ , який дорівнює:  $\oint_L \vec{H} d\vec{l}$ .

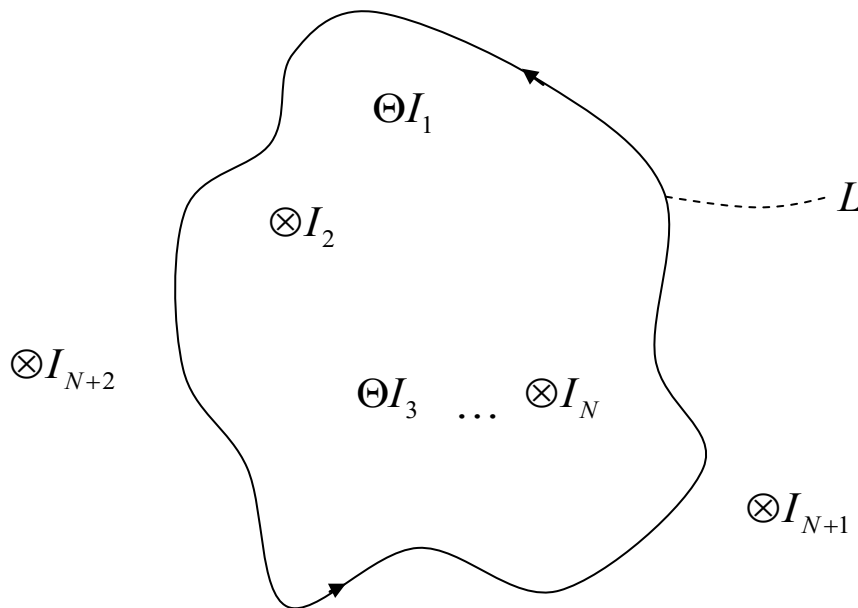


Рис.9.

**Закон повного струму** – циркуляція вектора напруженості магнітного поля вздовж довільного, замкненого контуру дорівнює алгебраїчній сумі сил електричних струмів, охоплених контуром:



$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i . \quad (1.47)$$

У правій частині закону повного струму (1.47) сума сил тільки тих електричних струмів, які охоплені замкненим контуром. Магнітні поля, створені електричними струмами не охопленими замкненим контуром не впливають на циркуляцію магнітного поля.

Якщо електричний струм, охоплений контуром, «виходить з рисунку», то його сила у законі повного струму вважається додатною. Якщо електричний струм, охоплений контуром, «йде в рисунок», то його сила у законі повного струму вважається від'ємною. Наприклад, на рисунку 9, силу струмів  $I_1$  і  $I_3$  у законі повного струму беруть зі знаком плюс; силу струмів  $I_2$  і  $I_N$  беруть зі знаком мінус.

### Приклади застосування закону повного струму.

В окремих випадках, використання закону повного струму значно спрощує знаходження силових характеристик магнітного поля.

**1) Застосування закону повного струму до знаходження напруженості магнітного поля, створеного прямолінійним, нескінченно довгим провідником зі струмом.**

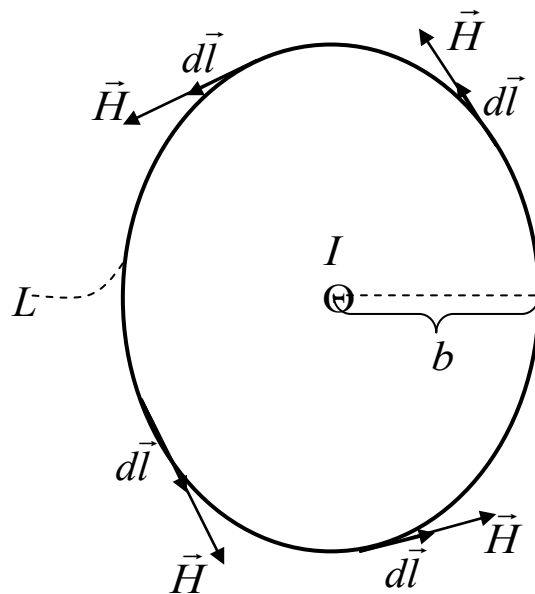


Рис. 10.

На рисунку 10 зображений нескінченно довгий, прямолінійний провідник зі струмом, силою  $I$ , напрям струму «з рисунку».

В якості замкненого контуру  $L$  виберемо коло, радіусу  $b$ , площина якого перпендикулярна до провідника, через центр кола проходить провідник зі струмом.

Оскільки вибраний замкнений контур збігається з силовою лінією магнітного поля, створеного прямолінійним провідником зі струмом, то у кожній точці контуру напрям напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  збігається з напрямом нескінченно малої, напрямленої ділянки контуру  $d\vec{l}$ , за визначенням силової лінії магнітного поля.

Окрім цього, в силу симетрії розташування контуру відносно провідника зі струмом, модуль напруженості магнітного поля однаковий у всіх точках контуру:  $H = const$ .

Тоді, циркуляція вектора напруженості магнітного поля, вздовж вибраного замкненого контуру, дорівнює:

$$\int_L \vec{H} d\vec{l} = \int_L H dl = H \int_L dl = H \cdot 2\pi b \quad . \quad (1.48)$$

Вибраний замкнений контур  $L$  охоплює тільки один провідник зі струмом, тому:

$$\sum_{i=1}^N I_i = I \quad . \quad (1.49)$$

Підставляючи рівності (1.48) і (1.49) у закон повного струму (1.47) маємо:

$$\begin{aligned} H \cdot 2\pi b &= I \\ \Downarrow \\ H &= \frac{I}{2\pi b} \quad . \end{aligned} \quad (1.50)$$

Використовуючи зв'язок (1.1) між напруженістю і індукцією магнітного поля одержимо:

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi b} \quad . \quad (1.51)$$

Одержаний вираз (1.51) для модуля індукції магнітного поля, створеного нескінченно довгим, прямолінійним провідником зі струмом,

збігається з виразом (1.21), який був одержаний за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа.

## 2) Застосування закону повного струму до знаходження напруженості магнітного поля всередині нескінченно довгого соленоїда.

Позначимо кількість витків на одиницю довжини у соленоїді через  $n$ , силу електричного струму, що протікає через нього, через  $I$ .

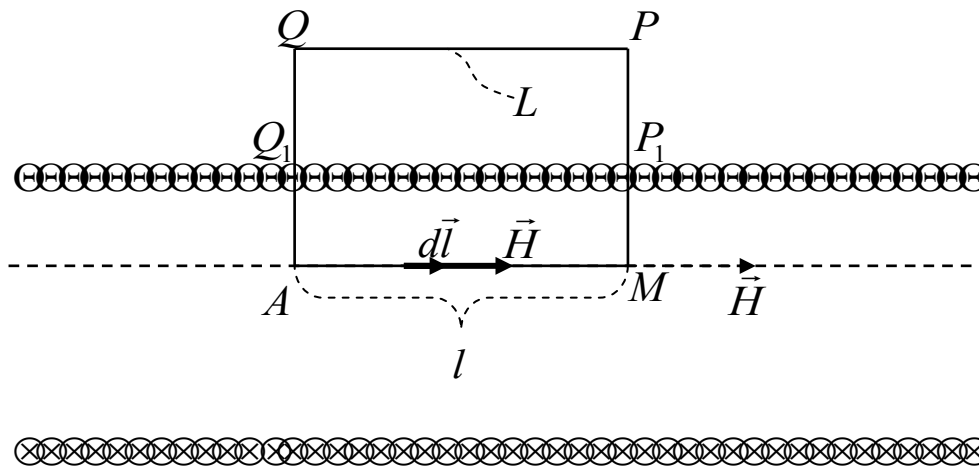


Рис. 11.

В якості замкненого контуру  $L$  виберемо прямокутник  $AMPQ$ , показаний на рисунку 11, довжину сторони  $AM$  прямокутника позначимо через  $l$ .

Циркуляцію вектора напруженості магнітного поля можна представити у вигляді суми інтегралів по сторонах прямокутника:

$$\int_L \vec{H} d\vec{l} = \int_{AM} \vec{H} d\vec{l} + \int_{MP_1} \vec{H} d\vec{l} + \int_{P_1P} \vec{H} d\vec{l} + \int_{PQ} \vec{H} d\vec{l} + \int_{QQ_1} \vec{H} d\vec{l} + \int_{Q_1A} \vec{H} d\vec{l} \quad (1.52)$$

В силу симетрії розташування колових струмів, силові лінії напруженості магнітного поля всередині соленоїда будуть паралельними до осі соленоїда і нескінченно малі ділянки контуру на стороні прямокутника  $AM$  будуть паралельними до відповідних їм векторів напруженості магнітного поля, окрім цього, у всіх точках сторони  $AM$  вектори напруженості магнітного поля будуть мати однаковий модуль:  $H = const$ . Використовуючи це знаходимо:

$$\int_{AM} \vec{H} d\vec{l} = \int_{AM} H dl = H \int_{AM} dl = H \cdot l \quad . \quad (1.53)$$

Якщо соленоїд нескінченно довгий, то напруженість магнітного поля у всіх зовнішніх, для соленоїда, точках контуру  $L$  дорівнює нулю, оскільки силові лінії магнітного поля будуть колами, нескінченно великого радіусу і точки контуру не можуть лежати на ньому. Звідси випливає, що:

$$\int_{R_1P} \vec{H} d\vec{l} = \int_{PQ} \vec{H} d\vec{l} = \int_{Q_1A} \vec{H} d\vec{l} = 0 \quad . \quad (1.54)$$

На ділянках контуру  $MP_1$  і  $Q_1A$  нескінченно малі, напрямлені ділянки перпендикулярні до, відповідних їм, векторів напруженості магнітного поля. Тоді, на ділянках контуру  $MP_1$  і  $Q_1A$ :  $\vec{H} d\vec{l} = 0$ , звідси випливає, що:

$$\int_{MP_1} \vec{H} d\vec{l} = \int_{Q_1A} \vec{H} d\vec{l} = 0 \quad . \quad (1.55)$$

Підставляючи рівності (1.53), (1.54) і (1.55) у вираз (1.52) знаходимо циркуляцію вектора напруженості магнітного поля:

$$\int_L \vec{H} d\vec{l} = H \cdot l \quad . \quad (1.56)$$

Позначимо через  $N$  кількість витків, охоплених замкненим контуром  $L$ . Тоді, сумарна сила електричних струмів, охоплених контуром дорівнює:

$$\sum_{i=1}^N I_i = NI \quad . \quad (1.57)$$

Згідно визначенню кількості витків на одиницю довжини (1.33) кількість витків  $N$  дорівнює:

$$N = nl \quad ,$$

тому, сумарна сила електричних струмів, охоплених замкненим контуром, дорівнює:

$$\sum_{i=1}^N I_i = Inl \quad . \quad (1.58)$$

Підставляючи рівності (1.56) і (1.57) у закон повного струму (1.47) отримуємо:

$$H \lambda = In \lambda \quad \Rightarrow \quad H = nI \quad . \quad (1.59)$$

Використовуючи зв'язок (1.1) між напруженістю і індукцією магнітного поля одержимо:

$$B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 nI \quad (1.60)$$

Одержаний вираз (1.60) для модуля індукції магнітного поля, створеного нескінченно довгим соленоїдом зі струмом, збігається з виразом (1.46), який був одержаний за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа.

Відстань ділянки контуру  $AM$  до осі соленоїда була обрана довільна (в межах від  $0$  до  $R$ ). Звідси випливає, що величина і напрям індукції магнітного поля всередині соленоїда однакові для всіх внутрішніх точок соленоїда. Тобто, магнітне поле всередині нескінченно довгого соленоїда зі струмом однорідне.

### 3) Застосування закону повного струму до знаходження напруженості магнітного поля всередині тороїда.

Позначимо силу електричного струму, що протікає через тороїд через  $I$ , радіус тороїда через  $R$ , кількість витків у тороїді через  $N$ , кількість витків на одиницю довжини у соленоїді через  $n$ .

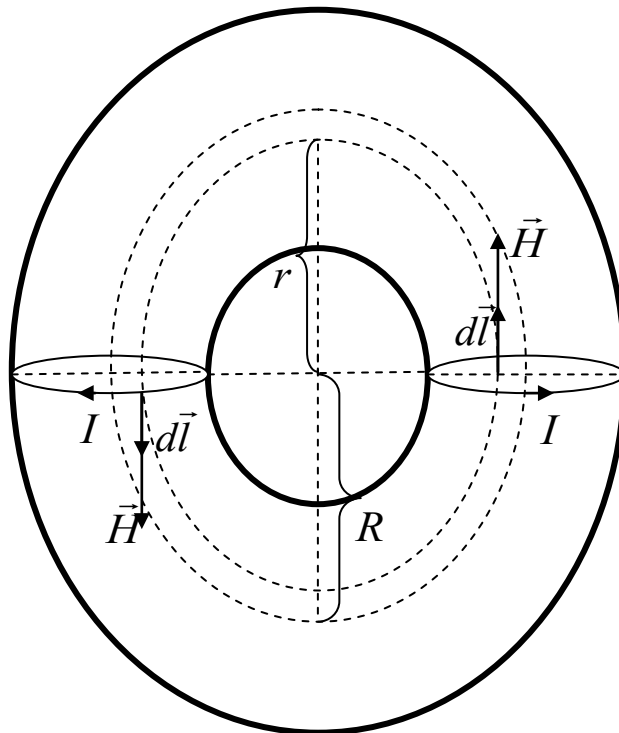


Рис. 12.

В якості замкненого контуру  $L$  виберемо коло, радіусу  $r$ , як показано на рисунку 12.

Вибраний замкнений контур, в силу симетрії, збігається з силовою лінією магнітного поля, створеного прямолінійним провідником зі струмом. Тому, у кожній точці контуру напрям напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  збігається з напрямом нескінченно малої, напрямленої ділянки контуру  $d\vec{l}$ , за визначенням силової лінії магнітного поля.

Окрім цього, в силу симетрії розташування контуру відносно витків зі струмом, модуль напруженості магнітного поля однаковий у всіх точках контуру:  $H = const$ .

Тоді, циркуляція вектора напруженості магнітного поля, вздовж вибраного замкненого контуру, дорівнює:

$$\int_L \vec{H} d\vec{l} = \int_L H dl = H \int_L dl = H \cdot 2\pi r \quad . \quad (1.61)$$

Вибраний замкнений контур  $L$  охоплює всі витки зі струмом у тороїді, тому:

$$\sum_{i=1}^N I_i = NI = 2\pi RnI \quad . \quad (1.62)$$

Підставляючи рівності (1.61) і (1.62) у закон повного струму (1.47) маємо:

$$H \cdot \cancel{2\pi} r = \cancel{2\pi} RnI$$

$$\Downarrow$$

$$H = nI \frac{R}{r} \quad . \quad (1.63)$$

Використовуючи зв'язок (1.1) між напруженістю і індукцією магнітного поля одержимо:

$$B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 nI \frac{R}{r} \quad . \quad (1.64)$$

Якщо радіус  $r$  замкненого контуру  $L$  буде більшим за зовнішній радіус тороїда або менший за внутрішній радіус тороїда, то контур не буде охоплювати електричні струми.

Тоді, сумарна сила електричних струмів, охоплених контуром буде дорівнювати нулю. Звідси, згідно закону повного струму, впливає, що напруженість магнітного поля, створеного електричним струмом у тороїді, дорівнює нулю у всіх зовнішніх для тороїда точках простору.

Якщо радіус тороїда значно більший за радіус витка зі струмом у тороїді, то:  $R \approx r$ . У цьому випадку, з виразу (1.64) випливає, що значення індукції магнітного поля всередині тороїда зі струмом буде прямувати до значення напруженості магнітного поля всередині нескінченно довгого соленоїда зі струмом, тобто, магнітне поле, у цьому випадку, можна приблизно вважати однорідним.

#### 1.4. Закон Ампера. Контур зі струмом в магнітному полі.

Закон Ампера визначає силу, з якою магнітне поле діє на нескінченно малу ділянку провідника зі струмом.

**Закон Ампера** – сила дії магнітного поля на елемент електричного струму дорівнює векторному добутку елемента струму на індукцію магнітного поля, у точці розташування елемента струму:

$$d\vec{F}_A = [I d\vec{l} ; \vec{B}] . \quad (1.65)$$

Використовуючи закон Ампера можна знайти силу дії магнітного поля на провідник зі струмом, довільної форми, шляхом інтегрування виразу (1.65) по всій довжині провідника:

$$\vec{F}_A = \int_l [I d\vec{l} ; \vec{B}] . \quad (1.66)$$

В якості прикладу знайдемо силу дії однорідного магнітного поля, з індукцією  $\vec{B}$ , на прямолінійний провідник, довжиною  $l$ , по якому проходить електричний струм, силою  $I$ .

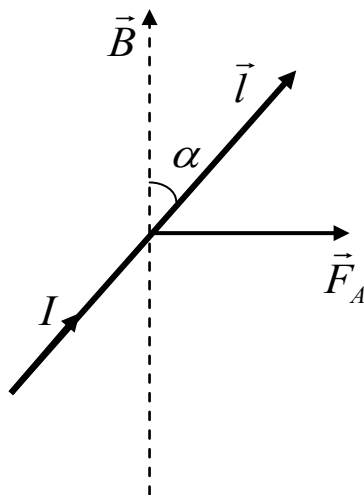


Рис. 13.

Якщо магнітне поле однорідне, то  $\vec{B} = const$  і, згідно виразу (1.66), маємо:

$$\vec{F}_A = \int_l [I d\vec{l} ; \vec{B}] = I \left[ \int_l d\vec{l} ; \vec{B} \right] = I [\vec{l} ; \vec{B}] ,$$

тобто:  $\vec{F}_A = I [\vec{l} ; \vec{B}] ,$  (1.67)

де вектор  $\vec{l}$ , зображений на рисунку 13, це сума всіх нескінченно малих, напрямлених ділянок провідника.

Модуль сили Ампера (1.67), що діє на прямолінійний провідник зі струмом у магнітному полі, дорівнює:

$$F_A = IlB \sin \alpha , \quad (1.68)$$

де  $\alpha$  це кут між напрямом індукції магнітного поля і напрямом електричного струму у провіднику.

Можна зауважити, що сила Ампера, згідно правила знаходження векторного добутку, завжди перпендикулярна до напрямку електричного струму і до напрямку індукції магнітного поля.

Нехай в однорідному магнітному полі, з індукцією  $\vec{B}$ , знаходиться провідний прямокутний контур, сторони якого дорівнюють  $a$  і  $b$ , який може обертатись навколо нерухомої осі обертання, перпендикулярної до силової лінії магнітного поля.

Виберемо систему координат таким чином, що б вісь обертання збігалась з віссю координат  $Z$ , а напрям осі  $Y$  збігався з напрямом силової лінії магнітного поля, як показано на рисунку 14а.

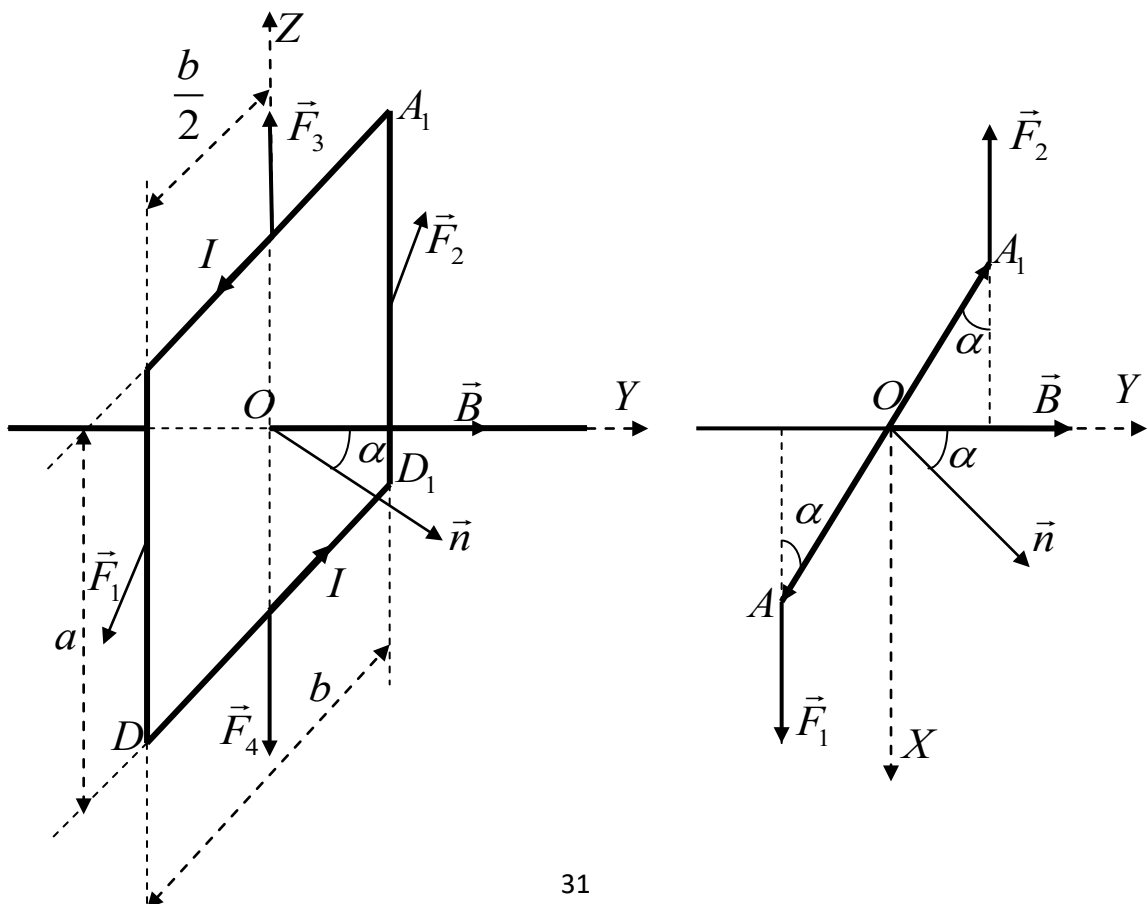




Рис. 14а.

Рис. 14б.

На кожную сторону прямокутного контуру з боку магнітного поля буде діяти сила Ампера.

Знайдемо сумарний момент сил Амперу, що діють на провідний контур, відносно осі обертання  $Z$ :  $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4$ .

Сили  $\vec{F}_3$  і  $\vec{F}_4$ , що діють на сторони контуру  $AA_1$  і  $DD_1$ , напрямлені вздовж осі обертання, як видно з рисунку 14а. Тому, моменти цих сил, відносно осі обертання  $Z$ , дорівнюють нулю:  $\vec{M}_3 = \vec{M}_4 = 0$ .

Тому, сумарний момент сил Амперу буде дорівнювати сумі моментів сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ :

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \quad . \quad (1.69)$$

На рисунку 14б зображена проекція провідного контуру на горизонтальну площину, яка має вигляд відрізка  $AA_1$ , кут між одиничним перпендикуляром до площини провідного контуру і напрямом силової лінії магнітного поля позначений через  $\alpha$ .

Моменти сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , що діють на сторони провідного контуру  $AD$  і  $A_1D_1$ , паралельні між собою, напрямлені вздовж осі обертання, як видно з рисунку 14б, і дорівнюють:

$$\vec{M}_1 = [\overrightarrow{OA}; \vec{F}_1] \quad , \quad \vec{M}_2 = [\overrightarrow{OA_1}; \vec{F}_2] \quad .$$

Згідно закону Ампера сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  протилежні, а модулі сил дорівнюють:

$$F_1 = F_2 = aIB \sin 90^\circ = aIB \quad , \quad (1.70)$$

тоді:  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$  ,

окрім цього, як видно з рисунку 14б, вектори  $\overrightarrow{OA}$  і  $\overrightarrow{OA_1}$  теж протилежні і рівні за модулем:

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OA_1}| = \frac{b}{2} \quad , \quad (1.71)$$

тобто:  $\overrightarrow{OA_1} = -\overrightarrow{OA}$  ,

звідси випливає рівність моментів сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ :

$$\vec{M}_2 = [\overrightarrow{OA_1}; \vec{F}_2] = [(-\overrightarrow{OA}); (-\vec{F}_1)] = [\overrightarrow{OA}; \vec{F}_1] = \vec{M}_1 \quad .$$

Тоді, сумарний момент сил, що діють на провідний контур дорівнює:

$$\vec{M} = 2\vec{M}_1 \quad . \quad (1.72)$$

Момент сили  $\vec{M}_1$  паралельний до осі координат  $Z$ . Тому, його можна представити у вигляді добутку одиничного базисного вектора  $\vec{k}$  і модуля моменту сили:

$$\vec{M}_1 = \vec{k} \cdot M_1 \quad . \quad (1.73)$$

Модуль моменту сили  $M_1$ , враховуючи, що площа провідного контуру дорівнює  $S = ab$  та рівності (1.70); (1.71), буде таким:

$$M_1 = F_1 \left| \overrightarrow{OA} \right| \sin \alpha = BIa \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} BIS \sin \alpha \quad ,$$

тоді:  $\vec{M}_1 = \vec{k} \cdot \frac{1}{2} BIS \sin \alpha$  і сумарний момент сил дорівнює:

$$\vec{M} = 2\vec{M}_1 = \vec{k} \cdot BIS \sin \alpha \quad . \quad (1.74)$$

Оскільки силова лінія магнітного поля напрямлена вздовж осі  $Y$ , то вектор індукції магнітного поля  $\vec{B}$  можна представити у вигляді добутку одиничного базисного вектора  $\vec{j}$ , вздовж осі  $Y$ , і модуля вектора індукції магнітного поля:

$$\vec{B} = \vec{j} \cdot B \quad . \quad (1.75)$$

Вектор  $\vec{k} \cdot \sin \alpha$  можна представити у вигляді векторного добутку одиничної нормалі до площини контуру  $\vec{n}$  і вектора  $\vec{j}$ , одиничного базисного вектора вздовж осі  $Y$ :

$$\vec{k} \cdot \sin \alpha = \left[ \vec{n}; \vec{j} \right] \quad . \quad (1.76)$$

Підставляючи вираз (1.76) у формулу (1.74) та враховуючи рівність (1.75) і визначення магнітного моменту  $\vec{p}_m = \vec{n}IS$ , одержимо:

$$\vec{M} = \vec{k} \cdot IS \sin \alpha = \left[ \vec{n}; \vec{j} \right] BIS = \left[ \vec{n}IS; \vec{j}B \right] = \left[ \vec{p}_m; \vec{B} \right] \quad .$$

Таким чином, сумарний момент сил Амперу, що діють на провідний контур зі струмом, дорівнює векторному добутку магнітного моменту контуру і вектора індукції магнітного поля:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m; \vec{B}] . \quad (1.77)$$

Шляхом нескладних, але громіздких обчислень можна показати, що отримана формула (1.77) визначає сумарний момент сил Ампера для провідного контуру зі струмом довільної форми.

### 1.5. Сила Лоренца. Рух зарядженої частинки в однорідних електричних та магнітних полях.

З закону Ампера випливає значення для сили, що діє на точковий заряд  $q$ , що рухається зі швидкістю  $\vec{v}$ , з боку магнітного поля, з індукцією  $\vec{B}$ .

Якщо за малий час  $dt$  поперечний переріз провідника перетинає тільки одна заряджена частинка, то сила струму, за визначенням буде дорівнювати  $I = \frac{q}{dt}$ . Елемент електричного струму стане таким:

$$Id\vec{l} = \frac{q}{dt} d\vec{l} = q \frac{d\vec{l}}{dt} = q\vec{v} ,$$

тобто: 
$$Id\vec{l} = q\vec{v} . \quad (1.78)$$

Тоді, у лівій частині закону Ампера (1.65) буде сила, з якою магнітне поле діє на один, точковий заряд:  $d\vec{F}_A \rightarrow \vec{F}_A$ , Підставляючи у закон Ампера (1.65) елемент струму у вигляді (1.78), одержимо:

$$\vec{F}_A = q[\vec{v}; \vec{B}] . \quad (1.79)$$

Одержаний вираз (1.79) визначає силу, з якою магнітне поле діє на рухому, заряджену частинку.

Якщо частинка рухається в електричному полі, то з визначення напруженості електричного поля випливає значення сили, з якою електричне поле, напруженості  $\vec{E}$ , діє на заряджену частинку:

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E} . \quad (1.80)$$

В загальному випадку, якщо частинка рухається в електромагнітному полі, то на неї одночасно діє сила з боку магнітного та електричного поля і результуюча сила  $\vec{F}$  буде дорівнювати їх сумі  $\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_A$ , тобто:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}; \vec{B}] \quad . \quad (1.81)$$

Силу (1.81), що діє на рухому частинку, з боку електромагнітного поля, називають **силою Лоренца**.

Розглянемо окремі випадки руху зарядженої частинки, масою  $m$  та зарядом  $q$ , в електромагнітному полі, вважаючи, що на частинку діє тільки сила Лоренца. Тоді, сила Лоренца є рівнодієюною силою і, згідно другому закону Ньютона, дорівнює добутку маси частинки на прискорення її руху:

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q[\vec{v}; \vec{B}] \quad . \quad (1.82)$$

Для проєкцій векторів на вісі координат векторна рівність (1.82) еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases} ma_x = qE_x + q(v_y B_z - v_z B_y) \\ ma_y = qE_y + q(v_z B_x - v_x B_z) \\ ma_z = qE_z + q(v_x B_y - v_y B_x) \end{cases} \quad . \quad (1.83)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1.83) можна знайти рівняння руху частинки.

**1) Рух зарядженої частинки, в однорідному електричному полі, з напруженістю  $\vec{E}$ .**

Для однорідного електричного поля  $\vec{E} = const$ . Якщо вибрати напрям осі координат  $X$  вздовж напрямку силової лінії електричного поля, то проєкції вектора напруженості електричного поля на вісі координат дорівнюватимуть:

$$E_x = E \quad ; \quad E_y = 0 \quad ; \quad E_z = 0 \quad . \quad (1.84)$$

Оскільки магнітне поле відсутнє, то проєкції вектора індукції магнітного поля на вісі координат рівні нулю:

$$B_x = 0 \quad ; \quad B_y = 0 \quad ; \quad B_z = 0 \quad . \quad (1.85)$$

Підставляючи значення проєкцій (1.84) та (1.85) у систему рівнянь (1.83) маємо:

$$\begin{cases} ma_x = qE \\ ma_y = 0 \\ ma_z = 0 \end{cases} . \quad (1.86)$$

Проекції прискорення частинки на вісі координат  $Y$  та  $Z$  дорівнюють нулю. Тому, залежність від часу координат частинки  $y$  та  $z$  буде збігатись з рівнянням прямолінійного, рівномірного руху:

$$y = y_0 + v_{0y}t \quad ; \quad z = z_0 + v_{0z}t \quad . \quad (1.87)$$

Проекція прискорення частинки на вісь координат  $X$ , як випливає з системи рівнянь (1.86), є постійною величиною і дорівнює:  $a_x = \frac{qE}{m}$ . Тому, залежність від часу координат частинки  $x$  буде збігатись з рівнянням прямолінійного, рівнозмінного руху:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{qE}{2m}t^2 \quad . \quad (1.88)$$

Таким чином, рівняння руху частинки в однорідному електричному полі, згідно виразам (1.87) і (1.88), такі:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{qE}{2m}t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t \\ z = z_0 + v_{0z}t \end{cases} . \quad (1.89)$$

Де  $x_0, y_0, z_0; v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}$  - початкові координати та проекції початкової швидкості руху частинки на вісі координат.

У частинному випадку, коли  $z_0 = 0; v_{0z} = 0; v_{0y} \neq 0$ , координата частинки  $z$ , протягом всього руху, дорівнює нулю і рівняння руху будуть такими:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{qE}{2m}t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t \\ z = 0 \end{cases} . \quad (1.90)$$

Траєкторія руху частинки буде належати площині  $XOY$ . Рівняння траєкторії руху, для цього частинного випадку, можна знайти з системи рівнянь (1.90). З другого рівняння системи (1.90) випливає:

$$t = \frac{y - y_0}{v_{0y}} \quad (1.91)$$

Підставляючи рівність (1.91) у перше рівняння системи (1.90) знаходимо рівняння траєкторії руху:

$$x = x_0 + \frac{v_{0x}}{v_{0y}}(y - y_0) + \frac{qE}{2mv_{0y}^2}(y - y_0)^2 \quad (1.92)$$

Рівняння руху (1.92) це рівняння параболи у площині  $XOY$ .

## 2) Рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі.

Для однорідного магнітного поля  $\vec{B} = const$ . Якщо вибрати напрям осі координат  $Z$  вздовж напрямку силової лінії магнітного поля, то проекції вектора індукції магнітного поля на вісі координат дорівнюватимуть:

$$B_x = 0 \quad ; \quad B_y = 0 \quad ; \quad B_z = B \quad (1.93)$$

Оскільки електричне поле відсутнє, то проекції вектора напруженості електричного поля на вісі координат рівні нулю:

$$E_x = 0 \quad ; \quad E_y = 0 \quad ; \quad E_z = 0 \quad (1.94)$$

Підставляючи значення проекцій (1.93) та (1.94) у систему рівнянь (1.83) маємо:

$$\begin{cases} ma_x = qv_y B \\ ma_y = -qv_x B \\ ma_z = 0 \end{cases} \quad (1.95)$$

Проекція прискорення частинки на вісь координат  $Z$  дорівнює нулю. Тому, залежність від часу координати частинки  $z$  буде збігатись з рівнянням прямолінійного, рівномірного руху:

$$z = z_0 + v_{0z}t \quad (1.96)$$

Розділимо обидві частини двох перших рівнянь системи (1.95) на масу

частинки і враховуючи, що  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ ;  $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ ;  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ;  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,

одержимо:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \cdot \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{qB}{m} \cdot \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (1.97)$$

Запровадимо позначення:  $\omega = \frac{qB}{m}$ , (1.98)

тоді система диференціальних рівнянь (1.97) набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \omega \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega \frac{dx}{dt} \end{cases} . \quad (1.99)$$

Беручи невизначений інтеграл по часу від рівнянь (1.99) маємо:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y + C_1 \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x + C_2 \end{cases} , \quad (1.100)$$

де  $C_1$  ;  $C_2$  - постійні, які визначаються початковими умовами.

В початковий момент часу  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_{0x}$  ;  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_{0y}$  ;  $x \Big|_{t=0} = x_0$  ;

$y \Big|_{t=0} = y_0$  . Підставляючи початкові умови у систему рівнянь (1.100)

знаходимо невідомі постійні:

$$\begin{cases} v_{0x} = \omega y_0 + C_1 \\ v_{0y} = -\omega x_0 + C_2 \end{cases} \\ \Downarrow \\ \begin{cases} C_1 = v_{0x} - \omega y_0 \\ C_2 = v_{0y} + \omega x_0 \end{cases} . \quad (1.101)$$

Підставляючи знайдені постійні (1.101) у систему рівнянь (1.99) маємо:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y + v_{0x} - \omega y_0 \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x + v_{0y} + \omega x_0 \end{cases} . \quad (1.102)$$

Після підстановки рівнянь (1.102) у систему рівнянь (1.99) одержимо:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \omega(-\omega x + v_{0y} + \omega x_0) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega(\omega y + v_{0x} - \omega y_0) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \omega v_{0y} + \omega^2 x_0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = -\omega v_{0x} + \omega^2 y_0 \end{cases} \quad (1.103)$$

Загальний розв'язок неоднорідних, диференціальних рівнянь (1.103) можна знайти у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$x = x_{одн} + x_{част} \quad ; \quad y = y_{одн} + y_{част} \quad . \quad (1.104)$$

Розв'язки однорідних рівнянь загальновідомі і мають такий вигляд:

$$x_{одн} = A_1 \cos \omega t + D_1 \sin \omega t \quad ; \quad y_{одн} = A_2 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t \quad , \quad (1.105)$$

де  $A_1, D_1, A_2, D_2$  - постійні величини, які визначаються початковими умовами.

Частинні розв'язки можна вибрати у вигляді постійних величин, які дорівнюють:

$$x_{част} = \frac{v_{0y}}{\omega} + x_0 \quad ; \quad y_{част} = -\frac{v_{0x}}{\omega} + y_0 \quad . \quad (1.106)$$

Безпосередньою підстановкою можна впевнитись, що величини (1.106) це частинні розв'язки рівнянь (1.103).

Підставляючи розв'язки (1.105); (1.106) у вирази (1.104) знаходимо:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + A_1 \cos \omega t + D_1 \sin \omega t \\ y = y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega} + A_2 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t \end{cases} \quad (1.107)$$

Диференціюючи рівняння (1.107) по часу і враховуючи, що  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ;  $v_y = \frac{dy}{dt}$ , знаходимо залежність від часу проєкцій швидкості руху частинки:



$$\begin{cases} v_x = -\omega A_1 \sin \omega t + \omega D_1 \cos \omega t \\ v_y = -\omega A_2 \sin \omega t + \omega D_2 \cos \omega t \end{cases} \quad (1.108)$$

Записуючи рівняння (1.107) та (1.108) для початкового моменту часу знаходимо невідомі постійні:

$$\begin{cases} x_0 = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + A_1 \\ y_0 = y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega} + A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{v_{0y}}{\omega} \\ A_2 = \frac{v_{0x}}{\omega} \end{cases} \quad (1.109)$$

$$\begin{cases} v_{0x} = \omega D_1 \\ v_{0y} = \omega D_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{v_{0x}}{\omega} \\ D_2 = \frac{v_{0y}}{\omega} \end{cases} \quad (1.110)$$

Підставляючи, знайдені з початкових умов, постійні величини (1.109) та (1.110) у вирази (1.107) і (1.108) остаточно знаходимо залежність від часу координат і проєкцій швидкості руху частинки:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t \\ y = y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t \\ z = z_0 + v_{0z} t \end{cases} \quad (1.111)$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0y} \sin \omega t + v_{0x} \cos \omega t \\ v_y = -v_{0x} \sin \omega t + v_{0y} \cos \omega t \\ v_z = v_{0z} \end{cases} \quad (1.112)$$

Для знаходження рівняння траєкторії руху у перших двох рівняннях системи (1.111) перенесемо всі постійні величини у ліві частини, підведемо обидва рівняння до квадрату і складемо їх:

$$\begin{cases} x - x_0 - \frac{v_{0y}}{\omega} = -\frac{v_{0y}}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t \\ y - y_0 + \frac{v_{0x}}{\omega} = \frac{v_{0x}}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x - x_0 - \frac{v_{0y}}{\omega}\right)^2 + \left(y - y_0 + \frac{v_{0x}}{\omega}\right)^2 = \frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{\omega^2} \quad (1.113)$$

Запровадимо позначення:

$$x_c = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} \quad ; \quad y_c = y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega} \quad ; \quad R = \frac{\sqrt{(v_{0x}^2) + (v_{0y}^2)}}{\omega} \quad (1.114)$$

Якщо використати позначення (1.114), то рівняння (1.113) буде таким:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad (1.115)$$

З одержаного рівняння (1.115) випливає, що частинка, відносно площини  $XOY$ , рухається по кола, радіусу  $R$ , центр якого знаходиться у точці з координатами  $(x_c; y_c)$ . З рівнянь руху (1.111) випливає, що постійна величина  $\omega$  це кутова швидкість руху по колу.

Відносно осі координат  $Z$  частинка рухається прямолінійно і рівномірно.

Якщо всі проекції початкової швидкості руху частинки відмінні від нуля:  $v_{0x} \neq 0$ ;  $v_{0y} \neq 0$ ;  $v_{0z} \neq 0$ , то частинка одночасно рухається по колу у площині  $XOY$  і рівномірно переміщується вздовж осі  $Z$ . Результатом накладання цих двох типів руху буде гвинтова лінія, вісь якої паралельна до силових півій магнітного поля.

Важливою характеристикою гвинтової лінії є крок гвинтової лінії, який позначимо через  $h$ .

**Крок гвинтової лінії** – відстань, на яку переміщується частинка вздовж осі гвинтової лінії за час, рівний періоду обертання по колу.

Вісь координат  $Z$ , у нашому випадку, збігається з віссю гвинтової лінії, частинка рівномірно переміщується вздовж осі  $Z$ . Тому, крок гвинтової лінії дорівнює:

$$h = v_{0z} T \quad (1.116)$$

Період обертання частинки по колу можна знайти за відомою кутовою швидкістю обертання (1.98):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} . \quad (1.117)$$

Підставляючи період обертання (1.117) у формулу (1.116) знаходимо:

$$h = \frac{2\pi m}{qB} v_{0z} . \quad (1.118)$$

Якщо проекція початкової швидкості руху частинки на вісь координат  $Z$  дорівнює нулю а решта проекцій початкової швидкості відмінні від нуля:  $v_{0x} \neq 0$ ;  $v_{0y} \neq 0$ ;  $v_{0z} = 0$ , то частинка не буде переміщуватись вздовж осі  $Z$  і траєкторією руху буде коло, радіусу  $R$ , центр якого знаходиться у точці з координатами  $(x_c; y_c; z_0)$ .

Якщо проекція початкової швидкості руху частинки на вісь координат  $Z$  відмінна від нуля а решта проекцій початкової швидкості дорівнюють нулю:  $v_{0x} = 0$ ;  $v_{0y} = 0$ ;  $v_{0z} \neq 0$ , то рівняння руху частинки (1.111) набувають вигляду:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + v_{0z}t \end{cases} , \quad (1.119)$$

З рівнянь (1.119) випливає, що, у даному випадку, частинка буде прямолінійно і рівномірно переміщуватись вздовж осі  $Z$  і траєкторією руху буде пряма лінія, паралельна до силової лінії магнітного поля.

Важливу інформацію про характер руху зарядженої частинки у магнітному полі можна одержати, якщо знайти модуль миттєвої швидкості руху частинки, використовуючи систему рівнянь (1.112):

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \\ &= \sqrt{(v_{0y} \sin \omega t + v_{0x} \cos \omega t)^2 + (-v_{0x} \sin \omega t + v_{0y} \cos \omega t)^2 + v_{0z}^2} = \\ &= \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2} \end{aligned} ,$$

тобто:  $v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2} . \quad (1.120)$

З одержаної рівності (1.120) випливає, що модуль миттєвої швидкості руху частинки, яка рухається у магнітному полі, не залежить від часу і дорівнює модулю початкової швидкості руху.

Якщо швидкість частинки, за модулем, не змінюється, то, при русі частинки в магнітному полі, не змінюється і кінетична енергія частинки. Робота рівнодійної сили, як відомо з механіки, дорівнює зміні кінетичної енергії частинки. Тому, робота сили, що діє на рухому частинку з боку магнітного поля дорівнює нулю:

$$A_{\text{магн.поля}} = 0 \quad . \quad (1.121)$$

Рівність нулю роботи магнітного поля випливає і з виразу (1.79), який визначає силу, що діє на рухому частинку в магнітному полі. Згідно виразу (1.79) сила дії магнітного поля на рухому частинку завжди перпендикулярна до миттєвої швидкості руху.

Це означає, що сила дії магнітного поля завжди перпендикулярна до нескінченно малого переміщення частинки а у випадку перпендикулярності сили і переміщення частинки робота сили дорівнює нулю.

### **3) Рух зарядженої частинки в однорідному електромагнітному полі, в якому силові лінії магнітного поля перпендикулярні до силових ліній електричного поля.**

Для однорідного електромагнітного поля  $\vec{B} = \text{const}$ ,  $\vec{E} = \text{const}$ . Якщо вибрати напрям осі координат  $Z$  вздовж напрямку силової лінії магнітного поля а напрям осі координат  $X$  вздовж напрямку силової лінії електричного поля, то проекції вектора індукції магнітного поля на вісі координат дорівнюватимуть:

$$B_x = 0 \quad ; \quad B_y = 0 \quad ; \quad B_z = B \quad , \quad (1.122)$$

а проекції вектора напруженості електричного поля на вісі координат дорівнюватимуть:

$$E_x = E \quad ; \quad E_y = 0 \quad ; \quad E_z = 0 \quad . \quad (1.123)$$

Підставляючи значення проекцій (1.122) та (1.123) у систему рівнянь (1.83) маємо:

$$\begin{cases} ma_x = qE + qv_y B \\ ma_y = -qv_x B \\ ma_z = 0 \end{cases} \quad . \quad (1.124)$$

Проекція прискорення частинки на вісь координат  $Z$  дорівнює нулю. Тому, залежність від часу координати частинки  $z$  буде збігатись з рівнянням прямолінійного, рівномірного руху:

$$z = z_0 + v_{0z}t \quad . \quad (1.125)$$

Розділимо обидві частини двох перших рівнянь системи (1.124) на масу

частинки і враховуючи, що  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ ;  $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ ;  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ;  $v_y = \frac{dy}{dt}$ , одержимо:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qE}{m} + \frac{qB}{m} \cdot \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{qB}{m} \cdot \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad . \quad (1.126)$$

Запровадимо позначення:

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad k = \frac{qE}{m}, \quad (1.127)$$

тоді система диференціальних рівнянь (1.126) набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = k + \omega \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad . \quad (1.128)$$

Беручи невизначений інтеграл по часу від рівнянь (1.128) маємо:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kt + \omega y + C_1 \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x + C_2 \end{cases}, \quad (1.129)$$

де  $C_1$ ;  $C_2$  - постійні, які визначаються початковими умовами.

В початковий момент часу  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_{0x}$ ;  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_{0y}$ ;  $x \Big|_{t=0} = x_0$ ;

$y \Big|_{t=0} = y_0$ .

Підставляючи початкові умови у систему рівнянь (1.129) знаходимо невідомі постійні:

$$\begin{cases} v_{0x} = \omega y_0 + C_1 \\ v_{0y} = -\omega x_0 + C_2 \end{cases} \\ \Downarrow \\ \begin{cases} C_1 = v_{0x} - \omega y_0 \\ C_2 = v_{0y} + \omega x_0 \end{cases} \quad (1.130)$$

Підставляючи знайдені постійні (1.130) у систему рівнянь (1.129) маємо:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kt + \omega y + v_{0x} - \omega y_0 \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x + v_{0y} + \omega x_0 \end{cases} \quad (1.131)$$

Після підстановки рівнянь (1.131) у систему рівнянь (1.128) одержимо:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = k + \omega(-\omega x + v_{0y} + \omega x_0) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega(kt + \omega y + v_{0x} - \omega y_0) \end{cases} \\ \Downarrow \\ \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = k + \omega v_{0y} + \omega^2 x_0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = -\omega kt - \omega v_{0x} + \omega^2 y_0 \end{cases} \quad (1.132)$$

Загальний розв'язок неоднорідних, диференціальних рівнянь (1.132) можна знайти у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$x = x_{одн} + x_{част} \quad ; \quad y = y_{одн} + y_{част} \quad (1.133)$$

Розв'язки однорідних рівнянь загальновідомі і мають такий вигляд:

$$x_{одн} = A_1 \cos \omega t + D_1 \sin \omega t \quad ; \quad y_{одн} = A_2 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t \quad , \quad (1.134)$$

де  $A_1, D_1, A_2, D_2$  - постійні величини, які визначаються початковими умовами.

Частинні розв'язки можна вибрати у вигляді:

$$x_{\text{част}} = \frac{k}{\omega^2} + \frac{v_{0y}}{\omega} + x_0 \quad ; \quad y_{\text{част}} = -\frac{kt}{\omega} - \frac{v_{0x}}{\omega} + y_0 \quad . \quad (1.135)$$

Безпосередньою підстановкою можна впевнитись, що величини (1.135) є частинні розв'язки рівнянь (1.132).

Підставляючи розв'язки (1.134); (1.135) у вирази (1.133) знаходимо:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{k}{\omega^2} + A_1 \cos \omega t + D_1 \sin \omega t \\ y = y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega} - \frac{kt}{\omega} + A_2 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t \end{cases} \quad . \quad (1.136)$$

Диференціюючи рівняння (1.136) по часу і враховуючи, що  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ;  $v_y = \frac{dy}{dt}$ , знаходимо залежність від часу проєкцій швидкості руху частинки:

$$\begin{cases} v_x = -\omega A_1 \sin \omega t + \omega D_1 \cos \omega t \\ v_y = -\frac{k}{\omega} - \omega A_2 \sin \omega t + \omega D_2 \cos \omega t \end{cases} \quad . \quad (1.137)$$

Записуючи рівняння (1.136) та (1.137) для початкового моменту часу знаходимо невідомі постійні:

$$\begin{cases} x_0 = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{k}{\omega^2} + A_1 \\ y_0 = y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega} + A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{v_{0y}}{\omega} - \frac{k}{\omega^2} \\ A_2 = \frac{v_{0x}}{\omega} \end{cases} \quad . \quad (1.138)$$

$$\begin{cases} v_{0x} = \omega D_1 \\ v_{0y} = -\frac{k}{\omega} + \omega D_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{v_{0x}}{\omega} \\ D_2 = \frac{k}{\omega^2} + \frac{v_{0y}}{\omega} \end{cases} \quad . \quad (1.139)$$

Підставляючи, знайдені з початкових умов, постійні величини (1.138) та (1.139) у вирази (1.136) і (1.137) остаточно знаходимо залежність від часу координат і проєкцій швидкості руху частинки:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \left( \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{k}{\omega^2} \right) (1 - \cos \omega t) + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t \\ y = y_0 - \frac{kt}{\omega} - \frac{v_{0x}}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \left( \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{k}{\omega^2} \right) \sin \omega t \\ z = z_0 + v_{0z} t \end{array} \right. \quad . \quad (1.140)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \left( v_{0y} + \frac{k}{\omega} \right) \sin \omega t + v_{0x} \cos \omega t \\ v_y = -\frac{k}{\omega} - v_{0x} \sin \omega t + \left( v_{0y} + \frac{k}{\omega} \right) \cos \omega t \\ v_z = v_{0z} \end{array} \right. \quad . \quad (1.141)$$

Якщо ввести позначення:

$$v_{\partial} = \frac{k}{\omega} = \frac{E}{B} \quad , \quad (1.142)$$

то рівняння (1.140) і (1.141) набувають більш простого виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \frac{(v_{0y} + v_{\partial})}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t \\ y = y_0 - \left( v_{\partial} t + \frac{v_{0x}}{\omega} \right) (1 - \cos \omega t) + \frac{(v_{0y} + v_{\partial})}{\omega} \sin \omega t \\ z = z_0 + v_{0z} t \end{array} \right. \quad . \quad (1.143)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = (v_{0y} + v_{\partial}) \sin \omega t + v_{0x} \cos \omega t \\ v_y = -v_{\partial} - v_{0x} \sin \omega t + (v_{0y} + v_{\partial}) \cos \omega t \\ v_z = v_{0z} \end{array} \right. \quad . \quad (1.144)$$



Для отримання інформації про траєкторію руху частинки, перетворимо перші два рівняння системи (1.143) наступним чином: перенесемо всі постійні величини і  $v_{\delta}t$  у ліві частини, підведемо рівняння до квадрату і складемо їх:

$$\begin{cases} x - x_0 - \frac{v_{0y} + v_{\delta}}{\omega} = -\frac{(v_{0y} + v_{\delta})}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t \\ y - y_0 + v_{\delta}t + \frac{v_{0x}}{\omega} = \frac{v_{0x}}{\omega} \cos \omega t + \frac{(v_{0y} + v_{\delta})}{\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left( x - x_0 - \frac{v_{0y} + v_{\delta}}{\omega} \right)^2 + \left( y - y_0 + v_{\delta}t + \frac{v_{0x}}{\omega} \right)^2 = \frac{v_{0x}^2 + (v_{0y} + v_{\delta})^2}{\omega^2} \quad (1.145)$$

Запровадимо позначення:

$$R_{\delta} = \frac{\sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} + v_{\delta})^2}}{\omega} \quad (1.146)$$

Якщо використати позначення (1.146) та раніше введені позначення (1.114), то рівняння (1.145) буде таким:

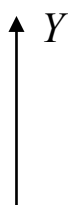
$$(x - x_c)^2 + (y - y_c + v_{\delta}t)^2 = R_{\delta}^2 \quad (1.147)$$

З одержаного рівняння (1.147) випливає, що частинка, відносно площини  $XOY$ , рухається по колу радіусу  $R_{\delta}$ , центр якого рівномірно переміщується вздовж осі  $Y$  зі швидкістю  $v_{\delta}$ . Швидкість переміщення центра кола називають дрейфовою швидкістю руху частинки.

Відносно осі координат  $Z$  частинка буде рухатись прямолінійно і рівномірно.

## 1.6. Магнітне поле на межі двох середовищ.

Розглянемо зміну характеристик магнітного поля на межі двох речовин, з магнітними проникливостями  $\mu_1$  та  $\mu_2$ . На рисунку 15 зображена плоска границя між двома речовинами, позначена через  $ABCD$ . Вище площини  $ABCD$  магнітна проникливість дорівнює  $\mu_1$ , нижче площини  $ABCD$  діелектрична проникливість дорівнює  $\mu_2$ .



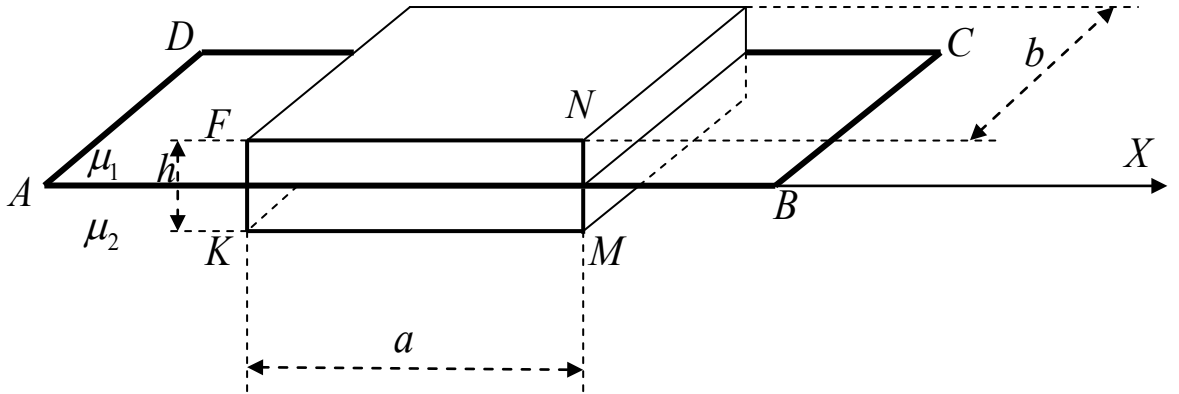
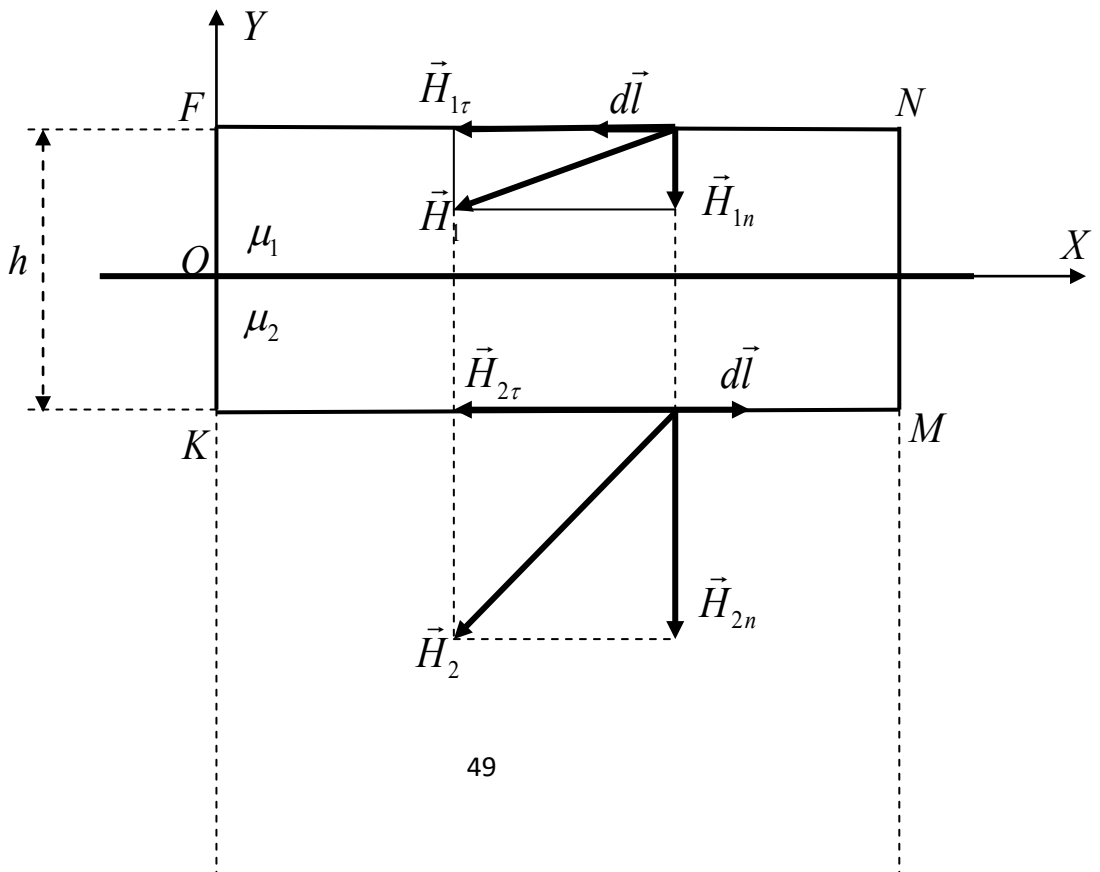


Рис. 15.

Розглянемо циркуляцію напруженості магнітного поля поблизу межі двох речовин, в якості замкненого контуру  $L$  виберемо прямокутник  $KMNF$ , висотою  $h$  та довжини  $a$ , показаний на рисунку 15.

Оскільки розташування замкненого контуру і напрям осей координат, відносно границі речовин, вибирається довільно, то їх можна вибрати так, що б напруженість магнітного поля, вздовж контуру, була розташована у площині  $XOY$ .

Тоді, вектор напруженості магнітного поля, відповідний точці контуру, можна розкласти на дві складових: складову  $\vec{H}_\tau$ , паралельну границі розділу речовин, і складову  $\vec{H}_n$ , перпендикулярну границі розділу речовин, як показано на рисунку 16.



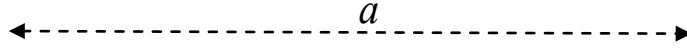


Рис. 16.

Позначимо вектор напруженості магнітного поля, відповідного ділянці  $NF$ , через  $\vec{H}_1$  а вектор напруженості магнітного поля, відповідного ділянці  $KM$ , через  $\vec{H}_2$  і розкладемо їх на складові, показані на рисунку 16.

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля вздовж замкненого контуру  $KMNF$ , згідно закону повного струму, дорівнює нулю, оскільки контур не охоплює електричні струми:

$$\oint_{KMNF} \vec{H} d\vec{l} = 0 \quad (1.148)$$

З іншого боку, циркуляція буде дорівнювати сумі інтегралів вздовж ділянок контуру:

$$\oint_{KMNF} \vec{H} d\vec{l} = \int_{KM} \vec{H}_2 d\vec{l} + \int_{MN} \vec{H} d\vec{l} + \int_{NF} \vec{H}_1 d\vec{l} + \int_{FK} \vec{H} d\vec{l} \quad (1.149)$$

Якщо висоту контуру  $KMNF$  спрямувати до нуля:  $h \rightarrow 0$ , то довжина ділянок  $MN$  та  $FK$  і інтеграли по цих ділянках теж будуть прямувати до нуля:

$$\int_{MN} \vec{H} d\vec{l} \rightarrow 0, \quad \int_{FK} \vec{H} d\vec{l} \rightarrow 0 \quad (1.150)$$

Тоді, підставляючи вирази (1.148) і (1.150) у рівність (1.149), знаходимо:

$$0 = \int_{KM} \vec{H}_2 d\vec{l} + \int_{NF} \vec{H}_1 d\vec{l} \quad (1.151)$$

Скалярні добутки  $\vec{H}_1 d\vec{l}$  та  $\vec{H}_2 d\vec{l}$ , як видно з рисунку 16, дорівнюють:

$$\vec{H}_1 d\vec{l} = (\vec{H}_{1\tau} + \vec{H}_{1n}) d\vec{l} = \vec{H}_{1\tau} d\vec{l} = H_{1\tau} dl \cos 0^\circ = H_{1\tau} dl \quad ;$$

$$\vec{H}_2 d\vec{l} = (\vec{H}_{2\tau} + \vec{H}_{2n}) d\vec{l} = \vec{H}_{2\tau} d\vec{l} = H_{2\tau} dl \cos 180^\circ = -H_{2\tau} dl \quad ;$$

$$\text{тобто: } \vec{H}_1 d\vec{l} = H_{1\tau} dl, \quad \vec{H}_2 d\vec{l} = -H_{2\tau} dl \quad .$$

Враховуючи, що внаслідок фізичної еквівалентності, для всіх точок ділянки  $NF$ :  $H_{1\tau} = const$  і для всіх точок ділянки  $KM$ :  $H_{2\tau} = const$ , знаходимо:

$$\int_{NF} \vec{H}_1 d\vec{l} = H_{1\tau} \int_{NF} dl = H_{1\tau} a \quad ;$$

$$\int_{KM} \vec{H}_2 d\vec{l} = -H_{2\tau} \int_{KM} dl = -H_{2\tau} a \quad ,$$

тобто: 
$$\int_{NF} \vec{H}_1 d\vec{l} = H_{1\tau} a \quad , \quad \int_{KM} \vec{H}_2 d\vec{l} = -H_{2\tau} a \quad . \quad (1.152)$$

Підставляючи вирази (1.152) у рівність (1.151) отримуємо:

$$(H_{1\tau} - H_{2\tau}) a = 0$$

$$\Downarrow$$

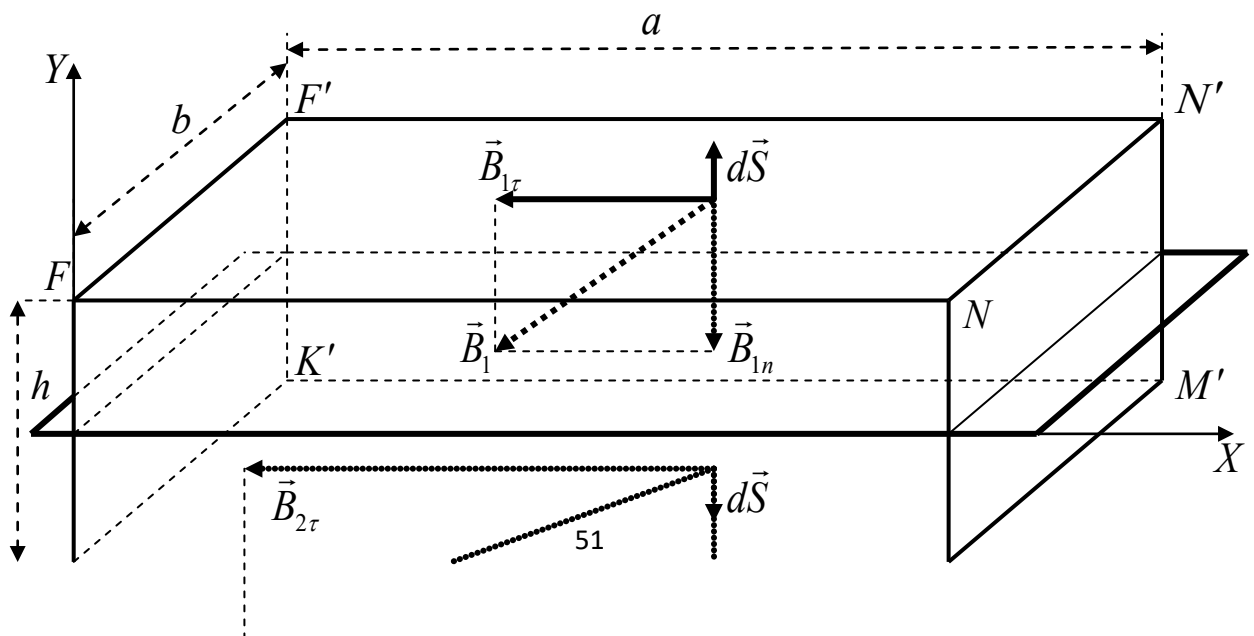
$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad . \quad (1.153)$$

**Теорема Гауса для магнітного поля** – потік вектора індукції магнітного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad . \quad (1.154)$$

Оскільки силові лінії магнітного поля замкнені і магнітних зарядів не існує, то магнітний потік через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю.

Застосуємо теорему Гауса для межі двох речовин, в якості замкненої поверхні  $S$  виберемо паралелепіпед, висоти  $h$ , довжини  $a$  та шириною  $b$ , який показано на рисунку 15 та, у збільшеному вигляді, на рисунку 17.



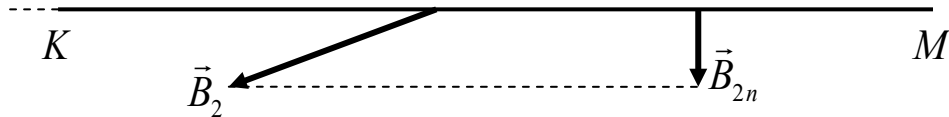


Рис. 17.

Оскільки розташування замкненої поверхні і напрям осей координат, відносно границі речовин, вибирається довільно, то їх можна вибрати так, що б вектор індукції був розташований у площині  $XOY$ .

Тоді, вектор індукції можна розкласти на дві складових: складову  $\vec{B}_\tau$ , паралельну границі розділу речовин, і складову  $\vec{B}_n$ , перпендикулярну границі розділу речовин, як показано на рисунку 17.

Позначимо вектор індукції на площині  $FNN'F'$  через  $\vec{B}_1$ , а вектор індукції на площині  $KMM'K'$  через  $\vec{B}_2$  і розкладемо їх на складові, показані на рисунку 17.

Потік вектора індукції через вибрану, замкнену поверхню  $S$ , згідно теоремі Гауса, дорівнює нулю:

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (1.155)$$

З іншого боку, потік буде дорівнювати сумі: інтегралу по верхній грані  $FNN'F'$ , інтегралу по нижній грані  $KMM'K'$  і інтегралу по бічним граням паралелепіпеду.

$$\oiint \vec{B} d\vec{S} = \int_{KMM'K'} \vec{B}_2 d\vec{S} + \int_{FNN'F'} \vec{B}_1 d\vec{S} + \int_{\text{бічні}} \vec{B} d\vec{S} \quad (1.156)$$

грані

Якщо висоту паралелепіпеду спрямувати до нуля:  $h \rightarrow 0$ , то площа бічних граней ділянок і інтеграл по бічним граням теж буде прямувати до нуля:

$$\int_{\text{бічні}} \vec{B} d\vec{S} \rightarrow 0 \quad (1.157)$$

грані

Тоді, підставляючи вирази (1.155) і (1.157) у рівність (1.156), знаходимо:

$$0 = \int_{KMM'K'} \vec{B}_2 d\vec{S} + \int_{FNN'F'} \vec{B}_1 d\vec{S} \quad (1.158)$$

Скалярні добутки  $\vec{B}_1 d\vec{l}$  та  $\vec{B}_2 d\vec{l}$ , як видно з рисунку 17, дорівнюють:

$$\vec{B}_1 d\vec{S} = (\vec{B}_{1\tau} + \vec{B}_{1n}) d\vec{S} = \vec{B}_{1n} d\vec{S} = B_{1n} dS \cos 180^\circ = -B_{1n} dS \quad ;$$

$$\vec{B}_2 d\vec{S} = (\vec{B}_{2\tau} + \vec{B}_{2n}) d\vec{S} = \vec{B}_{2n} d\vec{S} = B_{2n} dS \cos 0^\circ = B_{2n} dS \quad ;$$

тобто: 
$$\vec{B}_1 d\vec{S} = -B_{1n} dS \quad , \quad \vec{B}_2 d\vec{S} = B_{2n} dS \quad . \quad (1.159)$$

Враховуючи, що внаслідок фізичної еквівалентності, для всіх точок верхньої грані  $FNN'F'$ :  $B_{1n} = const$  і для всіх точок нижньої грані  $KMM'K'$ :  $B_{2n} = const$ , знаходимо:

$$\int_{FNN'F'} \vec{B}_1 d\vec{S} = -B_{1n} \int_{FNN'F'} dS = -B_{1n} ab \quad ;$$

$$\int_{KMM'K'} \vec{B}_2 d\vec{S} = B_{2n} \int_{KMM'K'} dS = B_{2n} ab \quad ,$$

тобто: 
$$\int_{FNN'F'} \vec{B}_1 d\vec{S} = -B_{1n} ab \quad , \quad \int_{KMM'K'} \vec{B}_2 d\vec{S} = B_{2n} ab \quad . \quad (1.160)$$

Підставляючи вирази (1.160) у рівність (1.158) отримуємо:

$$(B_{2n} - B_{1n}) ab = 0$$

$$\Downarrow$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad . \quad (1.161)$$

Таким чином, згідно рівностям (1.153) та (1.161), на границі двох речовин не змінюються складові вектора індукції, перпендикулярні границі розділу, і складові напруженості магнітного поля, паралельні до границі розділу.

Використовуючи зв'язок між вектором індукції і напруженістю магнітного поля можна записати:

$$H_{1\tau} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_0 \mu_1} \quad , \quad H_{2\tau} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0 \mu_2} \quad ; \quad B_{1n} = \mu_0 \mu_1 H_{1n} \quad , \quad B_{2n} = \mu_0 \mu_2 H_{2n} \quad . \quad (1.162)$$

Підставляючи вирази (1.162) у рівності (1.153) та (1.161) одержимо:

$$\cancel{\mu_0} \mu_1 H_{1n} = \cancel{\mu_0} \mu_2 H_{2n} \Rightarrow \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad ; \quad (1.163)$$

$$\frac{B_{1\tau}}{\cancel{\mu_0} \mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\cancel{\mu_0} \mu_2} \Rightarrow \frac{B_{2\tau}}{B_{1\tau}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad . \quad (1.164)$$

Одержані рівності (1.163) та (1.164) визначають зміну складової напруженості магнітного поля, перпендикулярної до границі розділу речовин, і зміну складової вектора індукції, паралельної до границі розділу речовин.

### 1.7. Закон електромагнітної індукції. Правило Ленца.

Потік вектора індукції магнітного поля через поверхню називають магнітним потоком:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad . \quad (1.165)$$

В системі СІ магнітний потік вимірюють в веберах:  $[\Phi] = B\delta$  .

У частинному випадку, коли поверхня  $S$  є ділянкою площини і магнітне поле однорідне, вектор  $\vec{B}$  однаковий для всіх точок поверхні і вектор одиничної нормалі  $\vec{n}$  теж однаковий для всіх точок поверхні. У цьому частинному випадку магнітний потік буде таким:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \vec{B} \vec{n} dS = \vec{B} \vec{n} \int_S dS = \vec{B} \vec{n} S = BS \cos \alpha \quad ,$$

тобто:  $\Phi = BS \cos \alpha \quad , \quad (1.166)$

де  $\alpha$  - це кут між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{n}$  .

**Закон електромагнітної індукції** – при зміні магнітного потоку через замкнений провідний контур у ньому виникає електрорушійна сила, яка дорівнює швидкості зміни магнітного потоку з протилежним знаком:

$$E_{\zeta} = -\frac{d\Phi}{dt} . \quad (1.167)$$

Фізичний зміст явища електромагнітної індукції – змінне магнітне поле спричиняє появу вихрового електричного поля, сила дії якого на вільні електрони у провідному контурі є сторонньою силою, що обумовлює е. р. с. індукції, розподілену по всій довжині контуру.

Окрім поняття магнітний потік існує ще поняття власний магнітний потік.

**Власний магнітний потік** – магнітний потік через провідний контур, обумовлений електричним струмом, що протікає у провідному контурі.

Індукційний струм – це електричний струм у провідному контурі, який виникає внаслідок дії е. р. с. індукції.

Напрямок індукційного струму визначається правилом Ленца.

**Правило Ленца** – індукційний струм має такий напрям, що б створений ним власний магнітний потік намагався компенсувати зміну магнітного потоку через провідний контур.

### 1.8. Самоіндукція. Коефіцієнт самоіндукції.

**Явище самоіндукції** – при включенні джерела напруги сила струму в електричному колі зростає до максимального значення не миттєво а за певний відрізок часу, при вимкненні джерела напруги сила струму в електричному колі зменшується до нуля теж не миттєво а за певний відрізок часу.

Самоіндукція є наслідком явища електромагнітної індукції: при включенні або вимкненні джерела напруги в електричному колі виникає е. р. с. індукції, яка протидіє зміні магнітного потоку в електричному колі і обумовлює не миттєву зміну сили струму в електричному колі.

Власний магнітний потік прямо пропорційний до сили електричного струму:

$$\Phi = LI . \quad (1.168)$$

Коефіцієнт пропорційності  $L$  між власним магнітним потоком і силою струму називають коефіцієнтом самоіндукції (або індуктивністю),  $[L] = Гн$  .



В якості прикладу знайдемо коефіцієнт самоіндукції для довгого соленоїда, всередині якого однорідне магнітне поле, з індукцією  $B = \mu\mu_0 nI$ , кількість витків у соленоїді  $N = nl$ , об'єм всередині соленоїда дорівнює  $V = lS$ .

Оскільки магнітне поле всередині довгого однорідне і напрям вектора його індукції збігається з напрямом нормалі до площини витка, то магнітний потік через один виток соленоїда, згідно виразу (1.166), дорівнює:  $\Phi_0 = BS \cos 0 = BS$ , а повний магнітний потік через соленоїд буде дорівнювати:  $\Phi = N\Phi_0 = NBS$ , тоді:

$$\begin{cases} \Phi = NBS = N\mu\mu_0 nIS = nl \cdot \mu\mu_0 nIS = \mu\mu_0 n^2 lS \cdot I = \mu\mu_0 n^2 V \cdot I \\ \Phi = LI \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L \cancel{I} = \mu\mu_0 n^2 V \cancel{I} \Rightarrow L = \mu\mu_0 n^2 V$$

$$L = \mu\mu_0 n^2 V \quad . \quad (1.169)$$

Вираз (1.169) визначає індуктивність нескінченно довгого соленоїда.

### 1.9. Енергія і об'ємна густина енергії магнітного поля.

Після підключення до котушки джерела постійної напруги, сила струму і напруга на котушці починають зростати і, через певний час, досягають максимального значення. Протягом зростання сили струму джерело напруги виконує роботу проти е. р. с. індукції, миттєве значення якої дорівнює миттєвому значенню напруги на котушці, але з протилежним знаком:

$$U = -E_i \quad , \quad (1.170)$$

енергія магнітного поля, що виникає всередині котушки, згідно закону збереження енергії, дорівнює роботі джерела напруги проти е. р. с. індукції.

Елементарна робота джерела напруги за визначенням миттєвої потужності струму (див. ч.3, 2.77, 2.79) дорівнює:

$$\begin{cases} P = \frac{\delta A}{dt} \\ P = IU \end{cases} \Rightarrow \delta A = IU dt \quad . \quad (1.171)$$

Замінюючи напругу на е. р. с. індукції і, використовуючи закон електромагнітної індукції та формулу (1.168) для власного магнітного потоку, маємо:

$$\delta A = IUdt = -IE_1 dt = I \frac{d\Phi}{dt} dt = Id\Phi = LI dI ,$$

тобто:  $\delta A = LI dI$  . (1.172)

Інтегруючи вираз (1.172) знаходимо роботу джерела напруги, яка дорівнює енергії магнітного поля всередині котушки:

$$W_{м.н.} = A = L \int_0^I IdI = \frac{1}{2} LI^2 ,$$

тобто:  $W_{м.н.} = \frac{1}{2} LI^2$  . (1.173)

Позначимо через  $w_{м.н.}$  - об'ємну густину енергії магнітного поля. Використовуючи вирази (1.169), (1.173) знаходимо:

$$w_{м.н.} = \frac{W_{м.н.}}{V} = \frac{LI^2}{2V} = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2 \cancel{V}}{2\cancel{V}} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 (nI)^2 = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 ,$$

тобто:  $w_{м.н.} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2$  . (1.174)

### 1.10. Струми замикання і розмикання.

Електрична схема має вигляд показаний на рисунку 18.

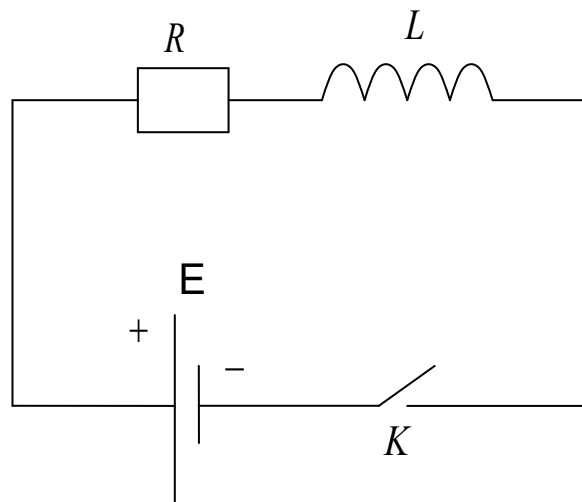


Рис. 18.

Під опором  $R$  в електричній схемі розуміється повний опір замкненого електричного кола, який дорівнює сумі зовнішнього опору, опору дроту, з якого виготовлена котушка, і внутрішнього опору джерела напруги.

Якщо ключ  $K$  тривалий час замкнений, то перехідні процеси у схемі завершилися і сила струму, згідно закону Ома, дорівнює:

$$I_{\max} = \frac{E}{R} . \quad (1.175)$$

### 1) Струм розмикання.

Розглянемо струм у колі при розмиканні ключа  $K$ . Електричний струм буде продовжувати йти, внаслідок виникнення е. р. с. індукції у котушці.

Оскільки магнітний потік у котушці є власним магнітним потоком, то він прямо пропорційний до сили струму:  $\Phi = LI$ .

Тоді, е. р. с. індукції, за законом електромагнітної індукції, дорівнюватиме:

$$E_{\zeta} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} . \quad (1.176)$$

Запишемо другий закон Кірхгофа (знак е. р. с. індукції входить у закон електромагнітної індукції):

$$E_{\zeta} = IR . \quad (1.177)$$

Підставляючи у закон Кірхгофа е. р. с. індукції у вигляді (1.176) одержимо для знаходження залежності сили струму від часу диференціальне рівняння першого порядку, змінні у якому розділяються:

$$\begin{aligned} -L \frac{dI}{dt} &= IR \\ \Downarrow \\ \frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L} dt . \end{aligned} \quad (1.178)$$

Беручи невизначений інтеграл від рівності (1.178) знаходимо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L} \int dt \\ \Downarrow \\ \ln\left(\frac{I}{C}\right) &= -\frac{R}{L} t \\ \Downarrow \end{aligned}$$

$$I = C \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) . \quad (1.179)$$

Невідому сталу  $C$  можна знайти з початкових умов. В початковий момент часу, при  $t = 0$ , сила струму дорівнює:  $I = I_{\max}$ , звідси:

$$C = I_{\max} = \frac{E}{R} . \quad (1.180)$$

Підставляючи постійну  $C$ , у вигляді (1.180), у вираз (1.179) маємо:

$$I = I_{\max} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) . \quad (1.181)$$

Рівність (1.181) визначає залежність сили струму від часу при розмиканні ключа.

## 2) Струм замикання.

Розглянемо струм у колі при замиканні ключа  $K$ . Електричний струм буде зростати від нуля до максимального значення не миттєво, внаслідок виникнення е. р. с. індукції у котушці, яка буде те ж визначатись виразом (1.176).

Запишемо другий закон Кірхгофа (знак е. р. с. індукції входить у закон електромагнітної індукції):

$$E + E_{\gamma} = IR . \quad (1.182)$$

Підставляючи у закон Кірхгофа е. р. с. індукції у вигляді (1.176) одержимо для знаходження залежності сили струму від часу неоднорідне, лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\begin{aligned} E - L \frac{dI}{dt} &= IR . \\ \Downarrow \\ \frac{dI}{dt} + I \frac{R}{L} &= \frac{E}{L} . \end{aligned} \quad (1.183)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.183) можна знайти у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$I = I_{\text{одн}} + I_{\text{част}} . \quad (1.184)$$

Оскільки однорідне рівняння, відповідне рівнянню (1.183) збігається з рівнянням (1.178), то загальний розв'язок однорідного рівняння буде таким:

$$I = C_1 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) . \quad (1.185)$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна вибрати у вигляді:

$$I_{\text{част}} = I_{\text{max}} = \frac{E}{R} . \quad (1.186)$$

Тоді, загальний розв'язок рівняння (1.183) дорівнює:

$$I = C_1 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + I_{\text{max}} . \quad (1.187)$$

Невідому сталу  $C_1$  можна знайти з початкових умов. В початковий момент часу, при  $t = 0$ , сила струму дорівнює нулю:  $I = 0$ , звідси:

$$C_1 = -I_{\text{max}} . \quad (1.188)$$

Підставляючи постійну  $C_1$ , у вигляді (1.188), у вираз (1.187) маємо:

$$I = I_{\text{max}} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right) . \quad (1.189)$$

Рівність (1.189) визначає залежність сили струму від часу при замиканні ключа.

### 1.11. Власні коливання в електричному контурі.

**Електричний контур** – це технічний пристрій, який складається з конденсатора і паралельно приєднаного до нього соленоїда.

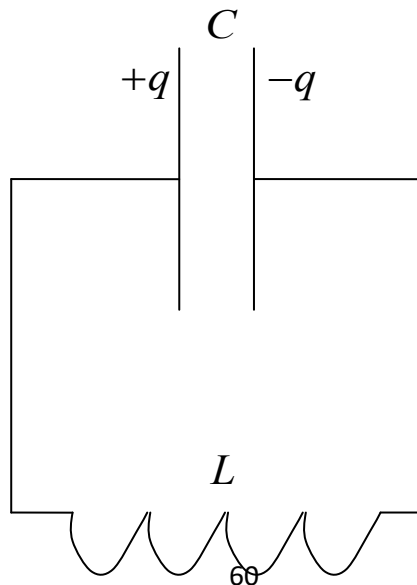


Рис. 19.

У випадку нехтовно малого опору дроту, з якого виготовлена котушка, електричний контур називають ідеальним. Коливання в ідеальному електричному контурі будуть власними (гармонічними).

Якщо зарядити конденсатор і від'єднати джерело напруги, то конденсатор почне розряджатись і через соленоїд почне проходити змінний електричний струм. Заряд на обкладках конденсатора буде змінюватись з часом.

Позначимо миттєве значення заряду конденсатора через  $q$ , миттєве значення сили струму у соленоїді позначимо через  $I$ , миттєве значення напруги на конденсаторі позначимо через  $U$ .

При зростанні сили струму у котушці виникне е. р. с. індукції, яка за другим законом Кірхгофа для повного кола буде дорівнювати напрузі на конденсаторі:

$$E_{\tau} = U \quad (1.190)$$

Використовуючи закон електромагнітної індукції і залежність власного магнітного потоку від сили струму напругу на конденсаторі можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} E_{\tau} = U \\ E_{\tau} = -\frac{d\Phi}{dt} \\ \Phi = LI \end{cases} \Rightarrow U = -L \frac{dI}{dt} \quad (1.191)$$

Сила струму у контурі дорівнює швидкості зміни заряду на конденсаторі:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (1.192)$$

Підставляючи силу струму у вигляді (1.192) у вираз (1.191) одержимо напругу у вигляді:

$$U = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow U = -L \frac{d^2q}{dt^2} \quad (1.193)$$

З іншого боку, напруга на конденсаторі і, за визначенням ємності конденсатора, дорівнює:

$$C = \frac{q}{U} \Rightarrow U = \frac{q}{C} \quad (1.194)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (1.193) і (1.194) одержимо диференціальне рівняння для знаходження залежності від часу заряду на конденсаторі:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad . \quad (1.195)$$

Якщо ввести позначення:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad (1.196)$$

то рівняння (1.195) набуває вигляду:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad . \quad (1.197)$$

Одержане рівняння (1.197) це диференціальне рівняння власних або гармонічних коливань в електричному контурі.

Розв'язок диференціального рівняння (1.197) був отриманий у першій частині посібника (див. ч. I, розділ «Коливання і хвилі»), згідно якому, величина заряду на конденсаторі буде змінюватись з часом за гармонічним законом:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) ; \quad (1.198)$$

де величина  $\omega_0$ , яка визначається за формулою (1.196) є циклічною частотою гармонічних або власних коливань в електричному контурі.

Тоді, період власних коливань в електричному контурі тоді дорівнює:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \quad . \quad (1.199)$$

За виразом (1.194) знаходимо залежність напруги від часу:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\Downarrow$$

$$U = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) ; \quad (1.200)$$

де  $U_m = \frac{q_m}{C}$  - амплітудне значення напруги. (1.201)

За виразом (1.192) знаходимо залежність від часу сили струму у контурі:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\Downarrow$$

$$I = -I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (1.202)$$

де  $I_m = q_m \omega_0$  - амплітудне значення сили струму. (1.203)

Якщо коливальний контур ідеальний, то енергія у коливальному контурі  $W_0$  не буде змінюватись з часом. Тобто, сума енергії електричного поля у конденсаторі і енергії магнітного поля у соленоїді буде постійною величиною:

$$W_0 = const ; W_0 = W_{e.n.} + W_{m.n.} .$$

Залежність від часу енергії електричного поля у конденсаторі буде такою:

$$W_{e.n.} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} C U_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\Downarrow$$

$$W_{e.n.} = W_{e.n.}^{\max} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (1.204)$$

де  $W_{e.n.}^{\max} = \frac{1}{2} C U_m^2$  - амплітудне значення енергії. (1.205)

Залежність від часу енергії магнітного у соленоїді поля буде такою:

$$W_{m.n.} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\Downarrow$$

$$W_{m.n.} = W_{m.n.}^{\max} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (1.206)$$

де  $W_{m.n.}^{\max} = \frac{1}{2} L I_m^2$  - амплітудне значення енергії. (1.207)

Оскільки сумарна енергія у коливальному контурі не змінюється з часом, то:  $W_0 = W_{e.n.}^{\max} ; W_0 = W_{m.n.}^{\max} ; W_{e.n.}^{\max} = W_{m.n.}^{\max} .$



Прирівнюючи максимальну енергію електричного поля у конденсаторі і максимальну енергію магнітного поля у соленоїді знаходимо зв'язок між амплітудними значеннями напруги і сили струму:

$$\frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}LI_m^2$$

$$\Downarrow$$

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}} \quad . \quad (1.208)$$

### 1.12. Затухаючі коливання в електричному контурі.

Розглянемо коливання в електричному контурі, при відмінному від нуля і рівному  $R$  опорі дроту, з якого виготовлена котушка.

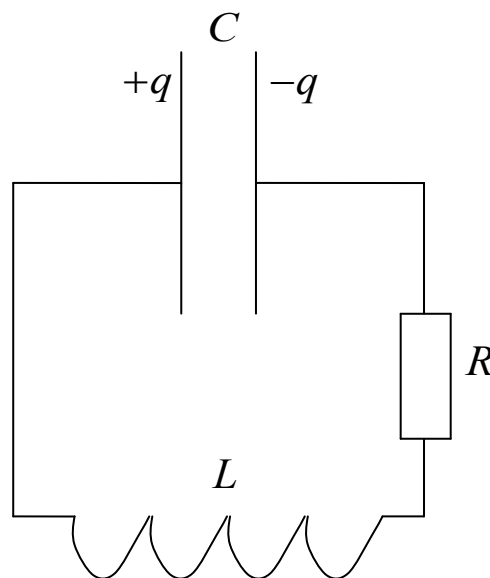


Рис. 20.

Згідно другому закону Кірхгофа е. р. с. індукції у контурі буде дорівнювати сумі падінь напруг на конденсаторі і на опорі  $R$  :

$$\mathcal{E}_\gamma = U + IR \quad . \quad (1.209)$$

Використовуючи закон електромагнітної індукції і залежність власного магнітного потоку від сили струму напругу на конденсаторі можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\gamma = U + IR \\ \mathcal{E}_\gamma = -\frac{d\Phi}{dt} \\ \Phi = LI \end{cases} \Rightarrow U = -L \frac{dI}{dt} - IR \quad . \quad (1.210)$$

Використовуючи рівність (1.192) для сили струму у контурі одержимо напругу (1.210) у вигляді:

$$U = -L \frac{d^2 q}{dt^2} - R \frac{dq}{dt} . \quad (1.211)$$

З іншого боку, та ж сама напруга буде на конденсаторі і, за визначенням ємності конденсатора, дорівнює:

$$C = \frac{q}{U} \Rightarrow U = \frac{q}{C} . \quad (1.212)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (1.211) і (1.212) одержимо диференціальне рівняння для знаходження залежності від часу заряду на конденсаторі:

$$\begin{aligned} \frac{q}{C} &= -L \frac{d^2 q}{dt^2} - R \frac{dq}{dt} \\ &\Downarrow \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q &= 0 . \end{aligned} \quad (1.213)$$

Якщо ввести позначення:

$$\beta = \frac{R}{2L} , \quad (1.214)$$

і використати позначення (1.196), то рівняння (1.213) набуває вигляду:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 . \quad (1.215)$$

Величину  $\beta$  називають коефіцієнтом затухання.

Одержане рівняння (1.215) це диференціальне рівняння затухаючих коливань в електричному контурі.

Розв'язок диференціального рівняння (1.215) був отриманий у першій частині посібника (див. ч. I, розділ «Коливання і хвилі»), згідно якому, величина заряду на конденсаторі буде змінюватись з часом за законом:

$$q = q_0 \exp\{-\beta t\} \cos(\omega t + \varphi_0) ; \quad (1.216)$$

де  $q_0$  це амплітуда для заряду на конденсаторі в початковий момент часу;

$\beta$  це коефіцієнт затухання;  $\omega$  це циклічна частота затухаючих коливань в електричному контурі, яка дорівнює (див. ч. I, розділ «Коливання і хвилі»):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad ; \quad (1.217)$$

період затухаючих коливань в електричному контурі тоді дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad . \quad (1.218)$$

Як видно з залежності від часу заряду на конденсаторі (1.216) амплітуда заряду на конденсаторі буде зменшуватись з часом, за законом:

$$q_m = q_0 \exp\{-\beta t\} \quad . \quad (1.219)$$

За виразом (1.212) знаходимо залежність напруги і амплітуди напруги від часу:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \exp\{-\beta t\} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad ; \quad (1.220)$$

$$U_m = \frac{q_0}{C} \exp\{-\beta t\} \quad . \quad (1.221)$$

За виразом (1.192) знаходимо залежність від часу сили струму у контурі:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \exp\{-\beta t\} (\omega \sin(\omega t + \varphi_0) + \beta \cos(\omega t + \varphi_0)) \quad . (1.222)$$

Вираз у дужках в правій частині рівності (1.222) можна перетворити наступним чином:

$$\begin{aligned} & \omega \sin(\omega t + \varphi_0) + \beta \cos(\omega t + \varphi_0) = \\ & = \sqrt{\omega^2 + \beta^2} \left( \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \varphi_0) \right) \end{aligned}$$

⇓

$$\omega \sin(\omega t + \varphi_0) + \beta \cos(\omega t + \varphi_0) = \sqrt{\omega^2 + \beta^2} \sin(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi) \quad (1.223)$$

де  $\Delta\varphi$  - додаткова різниця фаз між зарядом на конденсаторі і силою струму у котушці, синус і косинус для якої дорівнюють:

$$\begin{cases} \sin \Delta\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \\ \cos \Delta\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \end{cases} . \quad (1.224)$$

Оскільки  $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \cancel{\beta^2} + \cancel{\beta^2}} = \omega_0$ , то вирази (1.222) і (1.224) можна записати у вигляді:

$$\omega \sin(\omega t + \varphi_0) + \beta \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega_0 \sin(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi) ; \quad (1.225)$$

$$\begin{cases} \sin \Delta\varphi = \frac{\beta}{\omega_0} \\ \cos \Delta\varphi = \frac{\omega}{\omega_0} \end{cases} . \quad (1.226)$$

Підставляючи рівність (1.225) у вираз (1.222) знаходимо залежність від часу сили струму у контурі:

$$I = -q_0 \omega_0 \exp\{-\beta t\} \sin(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi) . \quad (1.227)$$

З виразу (1.227) випливає залежність від часу амплітуди сили струму у контурі:

$$I_m = q_0 \omega_0 \exp\{-\beta t\} . \quad (1.228)$$

Розділивши амплітуду (1.221) на амплітуду (1.228) знайдемо зв'язок між амплітудними значеннями напруги на конденсаторі і силою струму у котушці:

$$\begin{aligned} \frac{U_m}{I_m} &= \frac{\cancel{q_0} \exp\{\cancel{-\beta t}\}}{C \cancel{q_0} \omega_0 \exp\{\cancel{-\beta t}\}} = \frac{1}{C \omega_0} = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ &\Downarrow \\ U_m &= I_m \sqrt{\frac{L}{C}} . \end{aligned} \quad (1.229)$$

Логарифмічний декремент затухання і добротність електричного контуру дорівнюють (див. ч. I, розділ «Коливання і хвилі»):

$$\lambda = \beta T = \frac{2\pi \frac{R}{2L}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{\pi R}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}} \quad ; \quad (1.230)$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}} \quad . \quad (1.231)$$

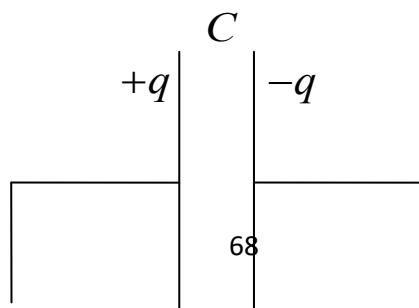
Якщо опір  $R$  нехтовно малий, у порівнянні з величиною  $\sqrt{\frac{L}{R}}$  (величину  $\sqrt{\frac{L}{R}}$  називають характеристичним опором електричного контуру), то логарифмічний декремент згасання і добротність електричного контуру наближено дорівнюють:

$$\lambda \approx \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad ; \quad (1.232)$$

$$Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad . \quad (1.233)$$

### 1.13. Вимушені коливання в електричному контурі.

Розглянемо коливання в електричному контурі, при відмінному від нуля і рівному  $R$  опору дроту, з якого виготовлена котушка, під дією зовнішньої електрорушійної сили, яка змінюється за гармонічним законом, з циклічною частотою  $\Omega$ .



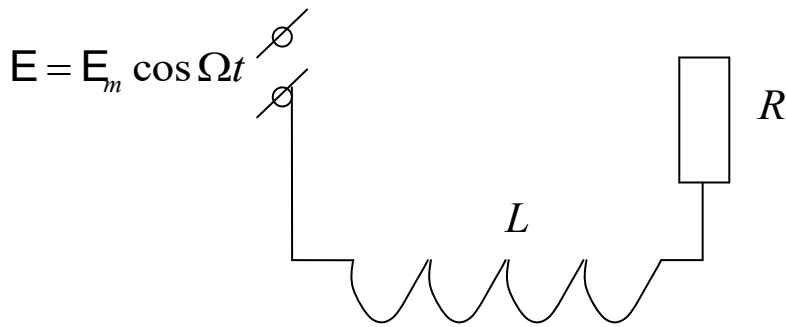


Рис. 21.

Згідно другому закону Кірхгофа сума зовнішньої електрорушійної сили і е. р. с. індукції буде дорівнювати сумі падінь напруг на конденсаторі і на опорі  $R$  :

$$E_m \cos \Omega t + E_i = U + IR \quad . \quad (1.234)$$

Використовуючи закон електромагнітної індукції і залежність власного магнітного потоку від сили струму, напругу на конденсаторі можна представити у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_m \cos \Omega t + E_i = U + IR \\ E_i = -\frac{d\Phi}{dt} \\ \Phi = LI \end{array} \right. \Rightarrow U = -L \frac{dI}{dt} - IR + E_m \cos \Omega t \quad . \quad (1.235)$$

Використовуючи рівність (1.192) для сили струму через котушку одержимо напругу (1.235) у вигляді:

$$U = -L \frac{d^2 q}{dt^2} - R \frac{dq}{dt} + E_m \cos \Omega t \quad . \quad (1.236)$$

З іншого боку, та ж сама напруга буде на конденсаторі і, за визначенням ємності конденсатора, дорівнює:

$$C = \frac{q}{U} \Rightarrow U = \frac{q}{C} \quad . \quad (1.237)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (1.236) і (1.237) одержимо диференціальне рівняння для знаходження залежності від часу заряду на конденсаторі:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{d^2 q}{dt^2} - R \frac{dq}{dt} + E_m \cos \Omega t$$

↓

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E_m}{L} \cos \Omega t \quad . \quad (1.238)$$

Якщо використати позначення (1.196) ; (1.214) то рівняння (1.238) набуває вигляду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L} \cos \Omega t \quad . \quad (1.239)$$

Одержане рівняння (1.239) це диференціальне рівняння вимушених коливань в електричному контурі.

Розв'язок диференціального рівняння (1.239) був отриманий у першій частині посібника (див. ч. I, розділ «Коливання і хвилі»), згідно якому, величина заряду на конденсаторі, після завершення перехідних процесів, буде змінюватись з часом за законом:

$$q = q_m \cos(\Omega t + \varphi_0) ; \quad (1.240)$$

де  $q_m$  - амплітуда для заряду на конденсаторі, яка дорівнює:

$$q_m = \frac{E_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} ; \quad (1.241)$$

$\varphi_0$  - початкова фаза вимушених коливань, яка визначається рівністю:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad . \quad (1.242)$$

За виразом (1.192) знаходимо залежність від часу сили струму у контурі:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad . \quad (1.243)$$

З виразу (1.243) впливає значення амплітуди сили струму у контурі:

$$I_m = q_m \Omega = \frac{E_m \Omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} ; \quad (1.244)$$

Використовуючи вирази (1.196) ; (1.214) амплітуду сили струму (1.244) можна записати у вигляді:

$$I_m = \frac{E_m \Omega}{L \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2} \Omega^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}} ; \quad (1.245)$$

Амплітуда сили струму, при вимушених коливаннях в електричному контурі, є функцією від  $\Omega$ , циклічної частоти зміни зовнішньої е. р. с.

**Резонанс в коливальному контурі** – явище різкого зростання амплітуди коливань сили струму в електричному контурі при наближенні циклічної частоти зовнішньої е. р. с. до певного значення  $\omega_{рез}$ , яке називають резонансним значенням частоти.

Амплітуда  $I_m$  буде максимальною, якщо знаменник у виразі (1.245) буде мінімальним. Очевидно, що знаменник мінімальний при умові:

$$\frac{1}{\Omega C} = \Omega L ;$$

тоді, резонансне значення циклічної частоти для електричного контуру дорівнює:

$$\frac{1}{\omega_{рез} C} = \omega_{рез} L \Rightarrow \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

Таким чином, резонансне значення циклічної частоти для електричного контуру збігається з власною циклічною частотою електричного контуру:

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (1.246)$$

#### 1.14. Струм зміщення. Узагальнений закон повного струму.

Змінний електричний струм, на відміну від постійного, проходить через конденсатор. Але, всередині конденсатора немає вільних носіїв заряду. Тому, електричний струм, який проходить через конденсатор, не є звичайним електричним струмом, його називають електричним струмом



зміщення. Фактично, електричний струм зміщення це змінне електричне поле всередині конденсатора.

Сила струму зміщення дорівнює швидкості зміни заряду на обкладках конденсатора:

$$I_{зм} = \frac{dq}{dt} \quad (1.247)$$

Розглянемо проходження електричного струму зміщення через плоский конденсатор.

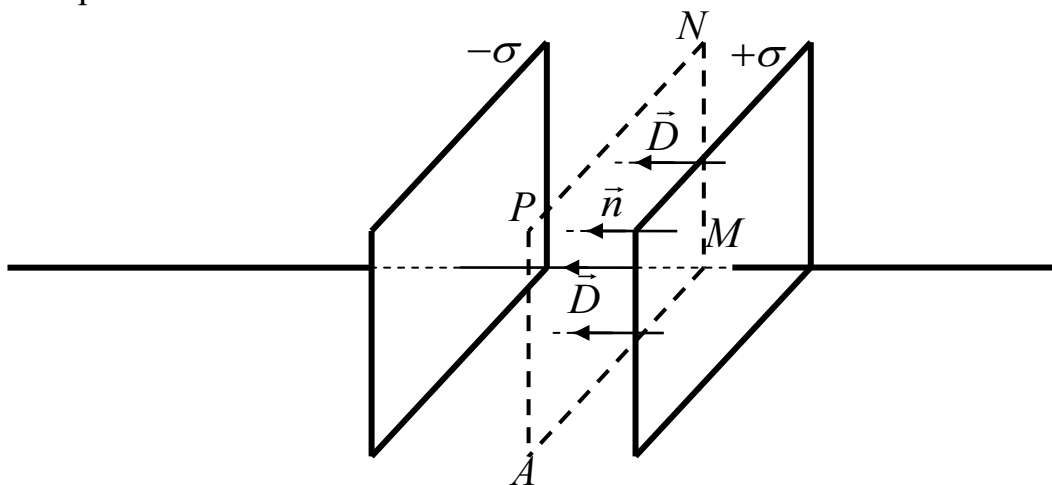


Рис.22.

Всередині плоского конденсатора однорідне електричне поле, модуль вектора напруженості якого, згідно виразу 1.149, ч. 3 посібника, дорівнює:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (1.248)$$

Тоді, модуль вектора електричного зміщення, за визначенням дорівнює:

$$D = \epsilon_0 \epsilon E = \sigma = \frac{q}{S} \quad ,$$

звідси випливає, що:  $D = \frac{q}{S} \Rightarrow q = DS \quad , \quad (1.249)$

де  $S$  - площа обкладки конденсатора,  $q$  - заряд конденсатора.

Розглянемо потік вектора електричного зміщення через ділянку площини  $AMNP$ , паралельну до обкладок конденсатора, площею  $S$ , показану на рисунку 22.

З рисунку 22 видно, що для довільної точки ділянки площини вектор нормалі  $\vec{n}$ , до поверхні  $AMNP$ , паралельний до вектора  $\vec{D}$ .

Тоді, для всіх елементів поверхні  $AMNP$  скалярний добуток вектора елемента поверхні  $d\vec{S} = \vec{n}dS$  на відповідний йому вектор електричного зміщення  $\vec{D}$  дорівнює:

$$\vec{D}d\vec{S} = \vec{D}\vec{n}dS = DdS \cdot \cos 0^\circ = DdS \quad . \quad (1.250)$$

В силу однорідності електричного поля всередині плоского конденсатора, модуль вектора електричного зміщення однаковий для всіх елементів поверхні  $AMNP$ , тобто:

$$D = const, \quad \text{для всіх елементів поверхні } AMNP. \quad (1.251)$$

Використовуючи рівності (1.250), (1.251) знаходимо потік вектора електричного зміщення через поверхню  $AMNP$ :

$$\int_S \vec{D}d\vec{S} = \int_S DdS = D \int_S dS = DS$$

$$\text{тобто:} \quad \int_S \vec{D}d\vec{S} = DS \quad . \quad (1.252)$$

З виразів (1.249) і (1.252) випливає, що заряд на конденсаторі дорівнює потоку вектора електричного зміщення через поверхню  $AMNP$ :

$$q = \int_S \vec{D}d\vec{S} \quad . \quad (1.253)$$

Тоді, сила струму зміщення, згідно виразу (1.247) і (1.253), дорівнює:

$$I_{zm} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D}d\vec{S}$$

$$\text{тобто:} \quad I_{zm} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D}d\vec{S} \quad . \quad (1.254)$$

Похідна по часу у виразі (1.254) стає частинною, оскільки значення вектора електричного зміщення може залежати від координат і від часу.

Згідно отриманому виразу (1.254), сила електричного струму зміщення дорівнює швидкості зміни потоку вектора електричного зміщення через конденсатор.

Максвелл припустив, що змінне електричне поле всередині конденсатора спричиняє появу магнітного поля.

Це припущення Максвелла було підтверджене експериментально.

Тоді, циркуляція вектора напруженості магнітного поля, створеного електричним струмом зміщення, по контуру  $AMNP$ , який обмежує поверхню  $S$ , згідно закону повного струму (1.47), повинна дорівнювати силі струму (силі струму зміщення), який охоплюється контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{zm} \quad (1.255)$$

↓

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} \quad (1.256)$$

**Узагальнений закон повного струму** – циркуляція вектора напруженості магнітного поля вздовж довільного, замкненого контуру дорівнює алгебраїчній сумі сил електричних струмів і сили електричного струму зміщення, які охоплюються даним контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} \quad (1.257)$$

### 1.15. Рівняння Максвелла.

Представимо закон електромагнітної індукції (1.167) в іншому вигляді.

Електрорушійна сила (див. ч.3, вираз 2.59), це характеристика джерела напруги, яка дорівнює відношенню роботи сторонніх сил по перенесенню заряду до величини перенесеного заряду:

$$E = \frac{A_{cm}}{q} \quad (1.258)$$

У випадку явища електромагнітної індукції, сторонні сили (сили дії вихрового електричного поля на електрони) розподілені по всій довжині провідного контуру.

Робота сторонніх сил, згідно визначенню напруженості електричного поля (див. ч.3, вираз 1.3) і визначенню роботи (див. ч.1, вираз 2.2.25) дорівнює добутку величини перенесеного заряду на циркуляцію вектора напруженості вихрового електричного поля по провідному контуру:

$$\begin{cases} A_{cm} = \oint_L \vec{F} d\vec{l} \\ \vec{F} = q\vec{E} \end{cases} \Rightarrow A_{cm} = q \oint_L \vec{E} d\vec{l} \quad (1.259)$$

Підставляючи роботу сторонніх сил (1.259) у визначення електрорушійної сили одержимо, що е. р. с. індукції дорівнює циркуляції вектора напруженості вихрового електричного поля вздовж провідного контуру:

$$\mathbf{E} = \frac{A_{cm}}{q} = \frac{\oint_L \vec{E} d\vec{l}}{\oint_L \vec{E} d\vec{l}} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} \Rightarrow \mathbf{E} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} \quad (1.260)$$

Зауваження: циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулю (див. ч.3, вираз 1.188), а циркуляція вектора напруженості вихрового електричного поля, згідно закону електромагнітної індукції, відмінна від нуля. Звідси випливає, що вихрове електричне поле не потенціальне.

Підставляючи у закон електромагнітної індукції (1.167) е. р. с. індукції у вигляді (1.260) і магнітний потік у вигляді (1.165) маємо:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (1.261)$$

Основні закони електромагнетизму: теорема Гауса для електричного поля (див. ч 3, вираз 1.90), теорема Гауса для магнітного поля (див. вираз 1.154), закон електромагнітної індукції (див. вираз 1.167), узагальнений закон повного струму (див. вираз 1.252) об'єднані в одну систему рівнянь, це і є рівняння Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} \end{array} \right. \quad (1.262)$$

Систему рівнянь (1.262) можна записати в іншому вигляді.

Замінімо у теоремі Гауса для електричного поля суму зарядів, охоплених замкненою поверхнею, на інтеграл по об'єму  $V$ , охопленому замкненою поверхнею, від об'ємної густини заряду  $\rho$  :

$$\sum_{i=1}^n q_i \rightarrow \int_V \rho dV \quad ; \quad (1.263)$$

суму сил струмів, охоплених замкненим контуром, в узагальненому законі повного струму замінимо на потік вектора густини електричного струму  $\vec{j}$  через поверхню, охоплену замкненим контуром (див. ч.3, вираз 2.8):

$$\sum_{i=1}^N I_i \rightarrow \int_S \vec{j} d\vec{S} \quad ; \quad (1.264)$$

тоді, система рівнянь (1.262) набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} \end{array} \right. \quad (1.265)$$

Систему рівнянь (1.265) називають рівняннями Максвелла в інтегральній формі.

Для одержання рівнянь Максвелла в диференціальній формі потрібно ліві частини перших двох рівнянь системи перетворити за теоремою Остроградського, згідно якій:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV \quad ; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV \quad , \quad (1.266)$$

де  $V$  - об'єм, охоплений замкненою поверхнею  $S$ , а ліві частини останніх двох рівнянь перетворити за теоремою Стокса, згідно якій:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} dV \quad ; \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{H} dV \quad , \quad (1.267)$$

де  $S$  - поверхня, охоплена замкненим контуром  $L$ .

Підставляючи вирази (1.266) і (1.267) у систему рівнянь (1.265) знаходимо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V \operatorname{div} \vec{D} = \int_V \rho dV \\ \int_V \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \int_S \operatorname{rot} \vec{E} = \int_S \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S} \\ \int_S \operatorname{rot} \vec{H} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \end{array} \right. . \quad (1.268)$$

Прирівнюючи підінтегральні вирази у рівняннях (1.268) маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. . \quad (1.269)$$

Систему рівнянь (1.269) називають рівняннями Максвелла в диференціальній формі. Якщо використати оператор Набла  $\vec{\nabla}$ , то рівняння Максвелла (1.269) можна записати у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \vec{B} = 0 \\ [\vec{\nabla}; \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ [\vec{\nabla}; \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. . \quad (1.270)$$

### 1.16. Електромагнітні хвилі, як наслідок з рівнянь Максвелла.

Для однорідного, ізотропного середовища ( $\varepsilon = const$ ;  $\mu = const$ ), у якому середня густина заряду дорівнює нулю і відсутні макроскопічні струми ( $\rho = 0$ ;  $\vec{j} = 0$ ), рівняння Максвелла (1.270) будуть такими:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \vec{D} = 0 \\ \vec{\nabla} \vec{B} = 0 \\ \left[ \vec{\nabla}; \vec{E} \right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \left[ \vec{\nabla}; \vec{H} \right] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. . \quad (1.271)$$

Представимо систему рівнянь (1.271) в іншому вигляді: замість вектора електричного зміщення підставимо його вираз через напруженість електричного поля:  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ ; замість вектора індукції магнітного поля підставимо його вираз через напруженість магнітного поля:  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ , тоді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \vec{H} = 0 \\ \left[ \vec{\nabla}; \vec{E} \right] = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \left[ \vec{\nabla}; \vec{H} \right] = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. . \quad (1.272)$$

Беручи похідну по часу від двох останніх рівнянь системи (1.272) маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \vec{\nabla}; \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = -\mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \\ \left[ \vec{\nabla}; \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{array} \right. . \quad (1.273)$$

Виразимо з двох останніх рівнянь системи (1.272) перші похідні по часу від напруженостей електричного і магнітного поля:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_0} [\vec{\nabla}; \vec{E}] \quad ; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} [\vec{\nabla}; \vec{H}] \quad . \quad (1.274)$$

Підставимо похідні по часу (1.274) у рівняння (1.273):

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} [\vec{\nabla}; [\vec{\nabla}; \vec{H}]] = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \\ -\frac{1}{\mu\mu_0} [\vec{\nabla}; [\vec{\nabla}; \vec{E}]] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} [\vec{\nabla}; [\vec{\nabla}; \vec{H}]] = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \\ [\vec{\nabla}; [\vec{\nabla}; \vec{E}]] = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{cases} \quad . \quad (1.275)$$

Розкриємо у лівих частинах рівнянь (1.275) подвійний векторний добуток за формулою з векторного аналізу  $[\vec{a}; [\vec{b}; \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$  :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{H}) - (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{H} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{E} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{cases} \quad . \quad (1.276)$$

Оскільки, згідно першим двом рівнянням системи (1.272)  $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$  ;  $\vec{\nabla}\vec{H} = 0$  і скалярний добуток операторів Набла дорівнює оператору Лапласа  $\vec{\nabla}\vec{\nabla} = \Delta$  , то рівняння (1.276) будуть такими:

$$\begin{cases} \Delta\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \\ \Delta\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{cases} \quad . \quad (1.277)$$



Загальне хвильове рівняння (див. ч.1, вираз 4.2.5) має вигляд:

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} , \quad (1.278)$$

де  $v$  - швидкість поширення хвилі. Тому, з отриманих рівнянь (1.277) випливає, що у просторі поширюються коливання значень векторів напруженості електричного і магнітного поля, тобто, випливає існування електромагнітних хвиль.

Порівнюючи загальне хвильове рівняння (1.278) з рівняннями (1.277) знаходимо швидкість поширення електромагнітної хвилі:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} . \quad (1.279)$$

Якщо електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі, то  $\varepsilon = 1$ ;  $\mu = 1$  і швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі дорівнюватиме:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{c} . \quad (1.280)$$

З рівнянь Максвелла випливає, що швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі збігається зі швидкістю поширення світла у вакуумі:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} . \quad (1.281)$$

Таким чином, було доведено, що світло це електромагнітна хвиля.

Використовуючи рівність (1.281) швидкість поширення електромагнітної хвилі можна записати у вигляді:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} . \quad (1.282)$$

### 1.17. Загальні властивості електромагнітної хвилі.

Розглянемо систему з двох останніх рівнянь системи (1.267):

$$\begin{cases} [\vec{\nabla}; \vec{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ [\vec{\nabla}; \vec{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} . \quad (1.283)$$

Скалярно помножимо перше рівняння системи (1.283) на вектор  $\vec{H}$ , друге рівняння системи (1.283) скалярно помножимо на вектор  $\vec{E}$  і, віднімаючи від першого рівняння друге, маємо:

$$\vec{H} [\vec{\nabla}; \vec{E}] - \vec{E} [\vec{\nabla}; \vec{H}] = -\mu\mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \quad (1.284)$$

Ліва частина рівності (1.284), згідно формулі з векторного аналізу:  $div[\vec{a}; \vec{b}] = \vec{b} [\vec{\nabla}; \vec{a}] - \vec{a} [\vec{\nabla}; \vec{b}]$ , є дивергенцією від векторного добутку напруженостей полів:

$$\vec{H} [\vec{\nabla}; \vec{E}] - \vec{E} [\vec{\nabla}; \vec{H}] = div[\vec{E}; \vec{H}] , \quad (1.285)$$

праву частину рівності (1.284) можна перетворити наступним чином:

$$-\mu\mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \right) , \quad (1.286)$$

тоді, вираз (1.284) набуває такого вигляду:

$$div[\vec{E}; \vec{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \right) . \quad (1.287)$$

Об'ємна густина енергії електричного поля (див. ч.3, 1.254) дорівнює:

$$w_{e.n.} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 , \quad (1.288)$$

об'ємна густина енергії магнітного поля (див. 1.174) дорівнює:

$$w_{m.n.} = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2, \quad (1.289)$$

а об'ємна густина енергії електромагнітної хвилі дорівнює сумі густини енергії електричного і магнітного поля:

$$w = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2. \quad (1.290)$$

Тому, похідна по часу у правій частині виразу (1.287) береться від об'ємної густини енергії електромагнітного поля. Використовуючи позначення густини енергії (1.290) у рівності (1.287) маємо:

$$\operatorname{div} [\vec{E}; \vec{H}] = -\frac{\partial w}{\partial t}. \quad (1.291)$$

Проінтегруємо рівність (1.291) по об'єму  $V$ . Застосовуючи для лівої частини рівності теорему Остроградського і враховуючи, що інтеграл від об'ємної густини енергії дорівнює енергії електромагнітного поля у даному об'ємі:  $W = \int_V w dV$ , одержимо:

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} [\vec{E}; \vec{H}] dV &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV \\ \Downarrow \\ \oiint_S [\vec{E}; \vec{H}] d\vec{S} &= -\frac{\partial W}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.292)$$

Отриманий вираз (1.292) це рівняння неперервності в інтегральній формі. Згідно якому, потік енергії електромагнітного поля через поверхню, що обмежує об'єм  $V$ , дорівнює швидкості зменшення енергії електромагнітного поля всередині об'єму  $V$ .

З рівняння (1.292) випливає значення вектора густини потоку електромагнітної енергії  $\vec{j}$ , який називають вектором Умова (див. ч.1, 4.2.76):

$$\vec{j} = [\vec{E}; \vec{H}]. \quad (1.293)$$

Напрямок вектора Умова збігається з напрямком поширення хвилі.

З виразу (1.293) випливає, що вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  перпендикулярні до напрямку поширення хвилі. Тому, електромагнітна хвиля поперечна.

Рівняння (1.283) можна, через одиничні базисні вектори, записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{i} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \\ = -\vec{i} \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} - \vec{j} \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} - \vec{k} \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.294)$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \\ = \vec{i} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \vec{j} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \vec{k} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.295)$$

Прирівнюючи множники біля одиничних базисних векторів у виразах (1.294), (1.295) перейдемо до скалярної форми рівнянь (1.283):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (1.296)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (1.297)$$

Розглянемо важливий частинний випадок електромагнітних хвиль - плоску електромагнітну хвилю.

Рівняння плоскої електромагнітної хвилі, у проєкціях на вісі координат мають такий вигляд (див. ч.1, 4.2.29):

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_{mx} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) ; \\
 E_y &= E_{my} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) ; \\
 E_z &= E_{mz} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) ; \\
 H_x &= H_{mx} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) ; \\
 H_y &= H_{my} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) ; \\
 H_z &= H_{mz} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) .
 \end{aligned} \tag{1.298}$$

Протягом поширення електромагнітної хвилі коливання значень векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  синфазні, у протилежному випадку рівняння (1.296), (1.297) не виконуються.

Підставляючи проєкції (1.298) у рівняння (1.296), (1.297) знаходимо:

$$\begin{cases}
 k_y E_{mz} - k_z E_{my} = \mu\mu_0 \omega H_{mx} \\
 k_z E_{mx} - k_x E_{mz} = \mu\mu_0 \omega H_{my} \\
 k_x E_{my} - k_y E_{mx} = \mu\mu_0 \omega H_{mz}
 \end{cases} . \tag{1.299}$$

$$\begin{cases}
 k_y H_{mz} - k_z H_{my} = -\varepsilon\varepsilon_0 \omega E_{mx} \\
 k_z H_{mx} - k_x H_{mz} = -\varepsilon\varepsilon_0 \omega E_{my} \\
 k_x H_{my} - k_y H_{mx} = -\varepsilon\varepsilon_0 \omega E_{mz}
 \end{cases} . \tag{1.300}$$

Помножуючи рівняння (1.299), (1.300) на  $\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)$ , знаходимо зв'язок між миттєвими значеннями проєкцій напруженостей полів:

$$\begin{cases}
 k_y E_z - k_z E_y = \mu\mu_0 \omega H_x \\
 k_z E_x - k_x E_z = \mu\mu_0 \omega H_y \\
 k_x E_y - k_y E_x = \mu\mu_0 \omega H_z
 \end{cases} . \tag{1.301}$$

$$\begin{cases}
 k_y H_z - k_z H_y = -\varepsilon\varepsilon_0 \omega E_x \\
 k_z H_x - k_x H_z = -\varepsilon\varepsilon_0 \omega E_y \\
 k_x H_y - k_y H_x = -\varepsilon\varepsilon_0 \omega E_z
 \end{cases} . \tag{1.302}$$

Помножуючи рівняння (1.301), (1.302) на відповідні одиничні базисні вектори і сумуючи рівняння, представимо їх у векторній формі:

$$\begin{aligned} \vec{i} (k_y E_z - k_z E_y) + \vec{j} (k_z E_x - k_x E_z) + \vec{k} (k_x E_y - k_y E_x) = \\ = \mu\mu_0 \omega (\vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{i} (k_y H_z - k_z H_y) + \vec{j} (k_z H_x - k_x H_z) + \vec{k} (k_x H_y - k_y H_x) = \\ = -\varepsilon\varepsilon_0 \omega (\vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z) \end{aligned}$$

↓

$$[\vec{k}; \vec{E}] = \mu\mu_0 \omega \vec{H} \quad (1.303)$$

$$[\vec{k}; \vec{H}] = -\varepsilon\varepsilon_0 \omega \vec{E} \quad (1.304)$$

Напрямок хвильового вектора збігається з напрямком швидкості поширення хвилі, тому:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{k} = \frac{k}{v} \vec{v} \Rightarrow \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda v} \vec{v} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{k} = \frac{2\pi}{T v \cdot v} \vec{v} \Rightarrow \vec{k} = \frac{\omega}{v^2} \vec{v} \end{aligned} \quad (1.305)$$

Якщо враховуючи вираз для швидкості поширення хвилі (1.279), то хвильовий вектор можна записати у вигляді:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v^2} \vec{v} = \omega\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \cdot \vec{v} \quad (1.306)$$

Підставляючи вираз (1.306) у рівності (1.303), (1.304) маємо:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \omega [\vec{v}; \vec{E}] = \mu\mu_0 \omega \vec{H}$$

$$\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \omega [\vec{v}; \vec{H}] = -\varepsilon\varepsilon_0 \omega \vec{E}$$

$$\text{тобто: } \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 [\vec{v}; \vec{E}] , \vec{E} = -\mu\mu_0 [\vec{v}; \vec{H}] \quad (1.307)$$

З виразів (1.307) випливає, вектори напруженостей електричного і магнітного поля перпендикулярні і вектори  $\vec{v}$ ;  $\vec{E}$ ;  $\vec{H}$  утворюють праву трійку векторів.

Окрім цього, використовуючи формулу для швидкості поширення хвилі (1.279), з виразів (1.307) можна отримати зв'язок між модулями миттєвих значень векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  :

$$H = \varepsilon\varepsilon_0 v E \sin 90^\circ = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} E = E \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}, \quad (1.308)$$

$$E = \mu\mu_0 v H \sin 90^\circ = \frac{\mu\mu_0}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} H = H \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}, \quad (1.309)$$

⇓

$$H \sqrt{\mu\mu_0} = E \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \quad . \quad (1.310)$$

Найчастіше, напрям осей координат вибирають таким чином, що б напрям поширення хвилі збігався з віссю  $X$  ; вектор  $\vec{E}$  був напрямлений вздовж осі  $Y$  ; вектор  $\vec{H}$  був напрямлений вздовж осі  $Z$  , як показано на рисунку 23.

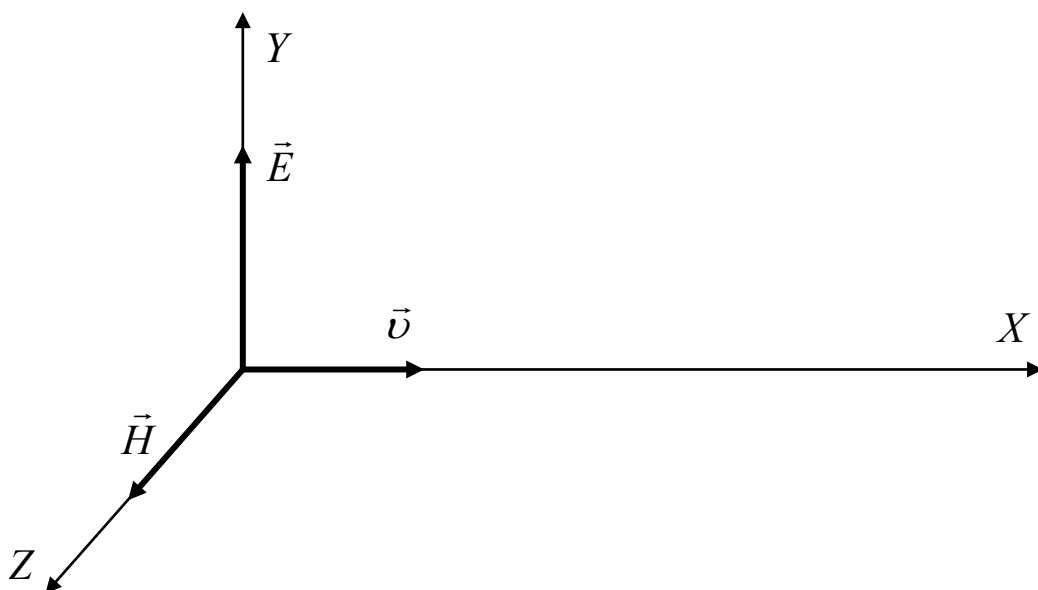


Рис. 23.

При такому виборі системи координат проекції векторів на вісі координат будуть такими:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \quad ; \quad E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad ; \quad E_z = 0 \quad ; \\ H_x &= 0 \quad ; \quad H_y = 0 \quad ; \quad H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad ; \\ v_x &= v \quad ; \quad v_y = 0 \quad ; \quad v_z = 0 \quad , \end{aligned} \quad (1.311)$$

де  $v$  - модуль швидкості поширення хвилі, що визначається виразом (1.279);  $k$  - модуль хвильового вектора;  $E_m$ ,  $H_m$  - амплітуди коливань векторів напруженості електричного і магнітного поля.

Тоді, рівняннями плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється у додатному напрямі осі координат  $X$ , будуть відмінні від нуля проекції векторів напруженості електричного і магнітного поля:

$$\begin{cases} E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \\ H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \end{cases} \quad (1.312)$$

Зауваження: при записі рівняння плоскої хвилі дуже часто «забувають» і не пишуть індекси  $Y, Z$  біля проекцій векторів напруженостей, вважаючи, що це і так зрозуміло.

Якщо підвести до квадрату і поділити на 2 обидві частини рівності (1.310), то одержимо:

$$\frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \quad (1.313)$$

З одержаної рівності (1.313) випливає, що при поширенні електромагнітної хвилі, у будь який момент часу, об'ємна густина енергії магнітного поля дорівнює об'ємній густині енергії електричного поля.

Густина потоку енергії (модуль вектора Умова) для плоскої електромагнітної хвилі, згідно виразам (1.293); (1.308); (1.312), дорівнює:

$$\begin{aligned} j &= EH \sin 90^\circ = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi_0) \\ &\Downarrow \\ j &= \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (1.314) \end{aligned}$$



Інтенсивність хвилі, за визначенням (див. ч.1, 4.2.77), це середнє по часу значення густини потоку енергії.

Скориставшись виразом (1.314) знайдемо інтенсивність плоскої електромагнітної хвилі, яку позначимо через  $J$  :

$$\begin{aligned}
 J &= \langle j \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T j dt = \\
 &= \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 \int_0^T \cos^2(\omega t - kx + \varphi_0) dt = \\
 &= \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos(2(\omega t - kx + \varphi_0))) dt = \\
 &= \frac{1}{2T} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 \left( \int_0^T dt + \int_0^T \cos(2(\omega t - kx + \varphi_0)) dt \right) = \\
 &= \frac{1}{2T} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 \left( t \Big|_0^T + \frac{1}{2\omega} \sin(2(\omega t - kx + \varphi_0)) \Big|_0^T \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 \cdot \cancel{T} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 \quad , \\
 &\quad \Downarrow \\
 J &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 \quad . \quad (1.315)
 \end{aligned}$$

Таким чином, інтенсивність плоскої електромагнітної хвилі, як впливає з одержаного виразу (1.315), прямо пропорційна до квадрату амплітуди коливань напруженості електричного поля (або квадрату амплітуди коливань напруженості магнітного поля).

### 1.18. Ефект Доплера для електромагнітних хвиль.

Довжина і частота електромагнітної хвилі (як і звукової хвилі) залежать від швидкості руху джерела хвиль. Це явище називають ефектом Доплера.

Позначимо через  $\vec{v}_0$  - швидкість руху джерела електромагнітної хвилі, відносно приймача хвиль; через  $\theta$  - кут між напрямом швидкості руху джерела хвиль і відрізком, що з'єднує джерело і приймач хвиль, як показано на рисунку 24.

Пов'яжемо з приймачем систему відліку  $K$ , з джерелом хвиль систему відліку  $K'$ . Напрями відповідних осей координат у системах відліку паралельні (див. рис. 24), джерело хвиль рухається у площині  $XOY$ . Окрім цього, виберемо напрями осей координат так, що б швидкість руху джерела хвиль була напрямлена вздовж осі координат  $X$ .

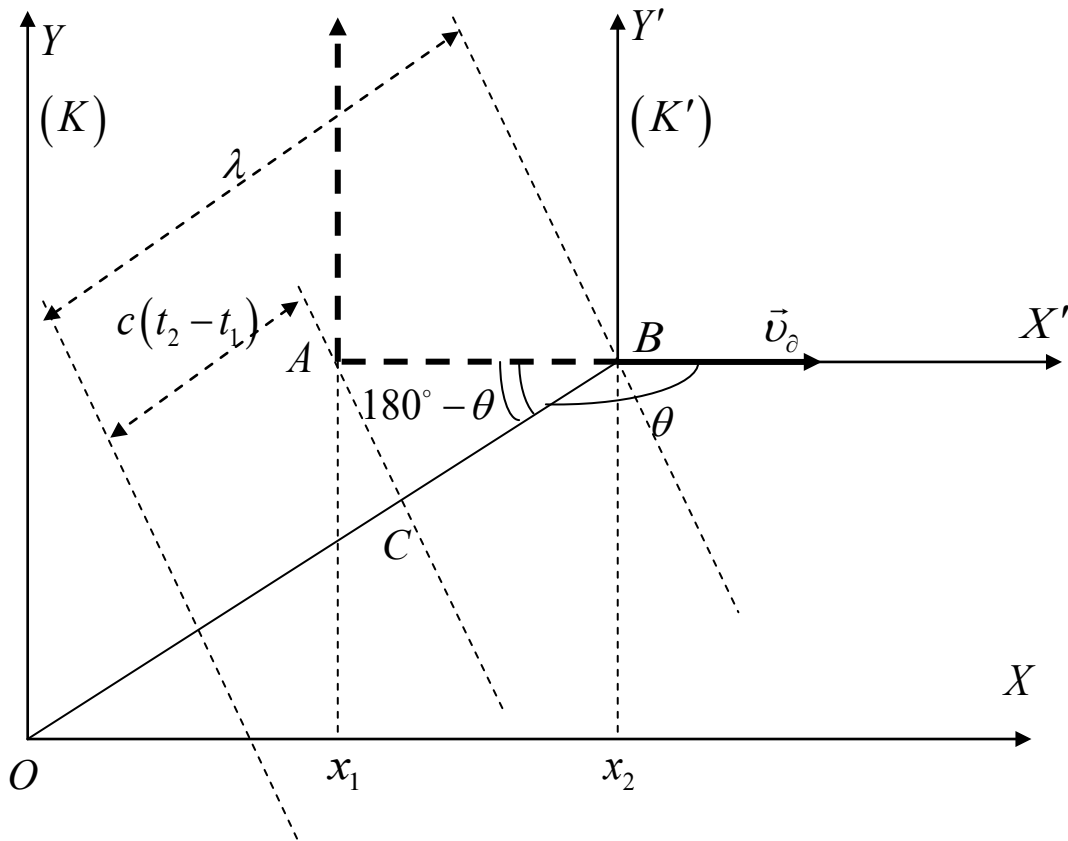


Рис. 24.

За час рівний періоду коливань (періоду у системі  $K'$ ) джерело хвиль переміщується з точки  $A$  в точку  $B$ .

Нехай подія 1 це перебування джерела хвиль у точці  $A$ ; подія 2 це перебування джерела хвиль у точці  $B$ .

Позначимо координати цих подій відносно системи  $K$  через  $(x_1; y_1; z_1; t_1); (x_2; y_2; z_2; t_2)$ , відносно системи  $K'$  через  $(x'_1; y'_1; z'_1; t'_1); (x'_2; y'_2; z'_2; t'_2)$ . Тоді, період коливань для електромагнітної хвилі  $T_0$ , відносно власної системи відліку  $K'$ , дорівнює:

$$T_0 = t'_2 - t'_1 \quad , \quad (1.316)$$

Як видно з рисунку 24, довжина хвилі, відносно системи відліку  $K$ , дорівнює:

$$\lambda = c(t_2 - t_1) + BC \quad , \quad (1.317)$$

З прямокутного трикутника  $ABC$ , показаного на рисунку 24, випливає:

$$\begin{aligned} BC &= (x_2 - x_1) \cos(180^\circ - \theta) \\ &\Downarrow \\ BC &= -(x_2 - x_1) \cos \theta \quad , \end{aligned}$$

$$\text{тоді, } \lambda = c(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1) \cos \theta \quad . \quad (1.318)$$

Джерело хвиль знаходиться у початку координат системи  $K'$ , тому:

$$x'_1 = x'_2 = 0 \quad , \quad (1.319)$$

тоді, згідно перетворенням Лоренца (див. ч.1, розділ 3), маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{x'_2 + v_\partial t'_2}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} \\ x_1 = \frac{x'_1 + v_\partial t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{v_\partial t'_2}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} \\ x_1 = \frac{v_\partial t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} \end{array} \right. ; \quad (1.320)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v_\partial}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} \\ t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v_\partial}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_2 = \frac{t'_2}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} \\ t_1 = \frac{t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} \end{array} \right. . \quad (1.321)$$

Знаходячи різницю між рівняннями (1.320) і між рівняннями (1.321) одержимо:

$$x_2 - x_1 = \frac{v_\partial (t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} ; \quad (1.322)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} . \quad (1.323)$$

Довжина хвилі, відносно системи  $K'$ , згідно визначенню, дорівнює:

$$\lambda_0 = cT_0 = c(t'_2 - t'_1) \Rightarrow t'_2 - t'_1 = \frac{\lambda_0}{c} . \quad (1.324)$$

Враховуючи рівність (1.324) у виразах (1.322); (1.323) маємо:

$$x_2 - x_1 = \frac{v_\partial \frac{\lambda_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} ; \quad (1.325)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{\lambda_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_\partial^2}{c^2}}} . \quad (1.326)$$

Підставляючи вирази (1.325), (1.326) у рівність (1.317) одержимо довжину електромагнітної хвилі, відносно системи відліку  $K$  :

$$\lambda = \frac{\cancel{c} \frac{\lambda_0}{\cancel{c}} - v_{\partial} \frac{\lambda_0}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v_{\partial}^2}{c^2}}} = \frac{\lambda_0 \left( 1 - \frac{v_{\partial}}{c} \cos \theta \right)}{\sqrt{1 - \frac{v_{\partial}^2}{c^2}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0 \left( 1 - \frac{v_{\partial}}{c} \cos \theta \right)}{\sqrt{1 - \frac{v_{\partial}^2}{c^2}}} . \quad (1.327)$$

Розглянемо частинні випадки для напрямку руху джерела хвиль.

1) Джерело хвиль віддаляється від приймача хвиль вздовж відрізка, що з'єднує джерело і приймач хвиль. У цьому випадку кут  $\theta = 180^\circ$ , підставляючи значення кута у формулу (1.327) знаходимо:

$$\lambda = \frac{\lambda_0 \left( 1 + \frac{v_{\partial}}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v_{\partial}^2}{c^2}}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{\partial}}{c}}{1 - \frac{v_{\partial}}{c}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{\partial}}{c}}{1 - \frac{v_{\partial}}{c}}} . \quad (1.328)$$

З отриманого виразу (1.328) випливає, що довжина електромагнітної хвилі, яка надходить до приймача від джерела хвиль, що віддаляється від

приймача, більша довжини електромагнітної хвилі у власній системі відліку джерела хвиль:  $\lambda > \lambda_0$ .

2) Джерело хвиль рухається до приймача вздовж відрізка, що з'єднує джерело і приймач хвиль. У цьому випадку кут  $\theta = 0$ , підставляючи значення кута у формулу (1.327) знаходимо:

$$\lambda = \frac{\lambda_0 \left(1 - \frac{v_{\partial}}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v_{\partial}^2}{c^2}}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v_{\partial}}{c}}{1 + \frac{v_{\partial}}{c}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v_{\partial}}{c}}{1 + \frac{v_{\partial}}{c}}} . \quad (1.329)$$

З отриманого виразу (1.329) випливає, що довжина електромагнітної хвилі, яка надходить до приймача від джерела хвиль, що наближається до приймача, менша довжини електромагнітної хвилі у власній системі відліку джерела хвиль:  $\lambda < \lambda_0$ .

3) Джерело хвиль рухається перпендикулярно до відрізка, що з'єднує джерело і приймач хвиль. У цьому випадку кут  $\theta = 90^\circ$ , підставляючи значення кута у формулу (1.327) знаходимо:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{\partial}^2}{c^2}}} . \quad (1.330)$$

З отриманого виразу (1.330) випливає, що довжина електромагнітної хвилі, від джерела, яке рухається перпендикулярно до відрізка, що з'єднує джерело і приймач хвиль, більша довжини електромагнітної хвилі у власній системі відліку джерела хвиль:  $\lambda > \lambda_0$ .

Це й випадок у літературі називають поперечним ефектом Доплера.

**Підсумкова таблиця розділу «Електромагнетизм».**

<p><b>Вектор індукції магнітного поля</b> <math>\vec{B}</math>, в системі СІ:  <math>[B] = Tл</math>.</p>	<p>Силова векторна характеристика магнітного поля у даній точці простору.</p>
<p><b>Напруженість магнітного поля</b>, <math>\vec{H}</math>, в системі СІ:  <math>[H] = \frac{A}{м}</math>.</p>	<p>Силова векторна характеристика магнітного поля у даній точці простору.</p>
<p><b><u>Магнітна проникливість середовища</u></b> – безрозмірна фізична величина, яка характеризує вплив середовища на магнітне поле. Вона дорівнює відношенню модуля індукції магнітного поля у середовищі до модуля індукції магнітного поля у вакуумі.</p>	$\mu = \frac{B_{серед}}{B_{вакуум}}$
<p>Зв'язок між силовими характеристиками магнітного поля.</p>	<p><math>\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}</math>, де <math>\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}</math> - магнітна постійна; <math>\mu</math> - магнітна проникливість середовища.</p>
<p><b><u>Силова лінія магнітного поля</u></b> – лінія, для якої напрям дотичної, проведеної до довільної її точки, збігається з напрямом вектора напруженості магнітного поля <math>\vec{H}</math> або з напрямом вектора індукції магнітного поля <math>\vec{B}</math> у точці лінії, до якої проведена дотична.</p>	<p>Рівняння для силової лінії магнітного поля:</p> $\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{B_z}{B_x} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} \end{cases}$

<p><b>Елемент електричного струму</b> – нескінченно малий вектор, модуль якого дорівнює добутку сили струму <math>I</math> на нескінченно малу, напрямлену ділянку провідника <math>d\vec{l}</math>, напрям ділянки провідника збігається з напрямом електричного струму у провіднику.</p>	$I d\vec{l}$
<p><b>Закон Біо-Савара-Лапласа</b> дозволяє знайти індукцію магнітного поля, створеного елементом електричного струму, в обраній точці простору, положення якої, відносно елементу струму, визначається вектором <math>\vec{r}</math>.</p>	$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[I d\vec{l}; \vec{r}]}{r^3}$
<p><b>Індукція магнітного поля, створеного рухомим точковим зарядом</b>, у точці простору, положення якої відносно заряду визначене вектором <math>\vec{r}</math>.</p>	$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v}; \vec{r}]}{r^3}$
<p><b>Індукція магнітного поля, створеного електричним струмом силою <math>I</math>, що проходить по прямолінійному провіднику, довжиною <math>L</math>, у точці простору, яка знаходиться на відстані <math>b</math> від провідника.</b></p>	$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$ <p>де <math>\alpha_1; \alpha_2</math> - граничні кути між напрямом струму і напрямом на точку на кінцях провідника.</p>
<p><b>Індукція магнітного поля, створеного електричним струмом силою <math>I</math>, що проходить по прямолінійному, нескінченно довгому провіднику у точці простору, яка знаходиться на відстані <math>b</math> від провідника.</b></p>	$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi b}$



<p><b>Індукція магнітного поля на осі колового провідника зі струмом</b>, радіусу <math>R</math>, по якому протікає електричний струм силою <math>I</math>, на відстані <math>a</math> від центру колового провідника.</p>	$B = \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$
<p><b>Індукція магнітного поля у центрі колового провідника зі струмом.</b></p>	$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}$
<p><b>Магнітний момент</b> – вектор, який дорівнює добутку одиничної нормалі до площини провідного контуру, площі контуру і сили струму, що проходить через провідний контур.</p>	$\vec{p}_m = \vec{n}SI$
<p><b>Намагніченість</b> – вектор, який дорівнює сумарному магнітному моменту одиниці об'єму речовини, <math>\vec{J}</math>, в системі СІ: <math>[J] = \frac{A}{m}</math>.</p>	$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{V}$
<p><b>Зв'язок намагніченості з напруженістю магнітного поля у речовині.</b></p>	$\vec{J} = \chi \vec{H}$ <p>де <math>\chi</math> - магнітна сприйнятливість речовини.</p>
<p><b>Зв'язок магнітної сприйнятливості і магнітної проникливості речовини.</b></p>	$\mu = 1 + \chi$
<p><b>Кількість витків на одиницю довжини</b> – відношення кількості витків у соленоїді до його довжини.</p>	$n = \frac{N}{l}$
<p><b>Індукція магнітного поля на осі соленоїда (котушки)</b>, радіусу <math>R</math>, довжиною <math>l</math>, з кількістю витків на одиницю довжини <math>n</math>, через який проходить струм силою <math>I</math>.</p>	$B = \frac{\mu\mu_0 In}{2} \left( \frac{\frac{l}{2} + x}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{l}{2} - x}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + R^2}} \right)$ <p>де <math>x</math> - відстань від середини соленоїда до</p>

	точки на осі соленоїда.
<b>Індукція магнітного поля всередині нескінченно довгого соленоїда</b> , з кількістю витків на одиницю довжини $n$ , через який проходить струм силою $I$ .	$B = \mu\mu_0 In$
<b>Індукція магнітного поля всередині тороїда</b> , радіусу $R$ , з кількістю витків на одиницю довжини $n$ , через який проходить струм силою $I$ .	$B = \mu\mu_0 nI \frac{R}{r}$ де $r$ - відстань від центру тороїда до внутрішньої точки тороїда.
<b>Закон повного струму</b> – циркуляція вектора напруженості магнітного поля вздовж довільного, замкненого контуру дорівнює алгебраїчній сумі сил електричних струмів, охоплених контуром	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i$
<b>Закон Ампера</b> – сила дії магнітного поля на елемент електричного струму дорівнює векторному добутку елемента струму на індукцію магнітного поля, у точці розташування елемента струму.	$d\vec{F}_A = [Id\vec{l}; \vec{B}]$
<b>Робота по переміщенню прямолінійного провідника зі струмом в магнітному полі.</b>	$A = I\Delta\Phi$ де $\Delta\Phi$ - зміна магнітного потоку через контур, утворений рухомим провідником, джерелом струму і з'єднувальними провідниками.
<b>Момент сил Ампера, що діють на провідний контур зі струмом</b> , дорівнює векторному добутку магнітного моменту контуру і вектора індукції магнітного	$\vec{M} = [\vec{p}_m; \vec{B}]$

поля.	
<b>Робота по переміщенню (або при обертанні) провідного контуру зі струмом в магнітному полі.</b>	$A = I \Delta \Phi$ де $\Delta \Phi$ - зміна магнітного потоку через провідний контур.
<b>Сила Лоренца</b> – це сила, що діє на рухому частинку, з боку електромагнітного поля.	$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}; \vec{B}]$
<b>Теорема Гауса для магнітного поля</b> – потік вектора індукції магнітного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю.	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$
<b>Граничні умови</b> для силових характеристик магнітного поля на межі двох середовищ.	$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad ; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}$ $B_{1n} = B_{2n} \quad ; \quad \frac{B_{2\tau}}{B_{1\tau}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$
<b>Магнітний потік</b> – потік вектора індукції магнітного поля через поверхню. позначення $\Phi$ , Одиниця виміру системі СІ: $[\Phi] = Вб$	$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$
<b>Закон електромагнітної індукції</b> – при зміні магнітного потоку через замкнений провідний контур у ньому виникає електрорушійна сила, яка дорівнює швидкості зміни магнітного потоку з протилежним знаком.	$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} .$
<b>е. р. с. індукції</b> дорівнює циркуляції вектора напруженості вихрового електричного поля вздовж провідного контуру.	$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} .$
<b>Правило Ленца.</b>	Індукційний струм має такий напрям, що б створений ним власний магнітний потік намагався компенсувати зміну магнітного

	потіку через провідний контур.
<b>Власний магнітний потік</b> – магнітний потік через провідний контур, обумовлений електричним струмом, що протікає у провідному контурі.	Власний магнітний потік прямо пропорційний до сили електричного струму: $\Phi = LI$ , де $L$ - коефіцієнт самоіндукції.
<b>Коефіцієнт самоіндукції (індуктивність)</b> , позначення $L$ , Одиниця виміру системі СІ: $[L] = Гн$	Коефіцієнт пропорційності між власним магнітним потоком і силою струму, що протікає у провідному контурі.
<b>Індуктивність нескінченно довгого соленоїда.</b>	$L = \mu\mu_0 n^2 V$ .
<b>Енергія магнітного поля всередині котушки.</b>	$W_{м.п.} = \frac{1}{2} LI^2$ .
<b>Об'ємна густина енергії магнітного поля.</b>	$w_{м.п.} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2$ .
<b>Диференціальне рівняння власних або гармонічних коливань в електричному контурі.</b>	$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$ . де $\omega_0$ - циклічна частота гармонічних або власних коливань в електричному контурі.
<b>Циклічна частота гармонічних або власних коливань в електричному контурі.</b>	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .
<b>Період гармонічних або власних коливань в електричному контурі.</b>	$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ .
<b>Залежність від часу заряду конденсатора, напруги на конденсаторі та сили струму у контурі, при власних коливаннях в електричному контурі.</b>	$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$ $U = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$ $I = -I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) .$

<p><b>Зв'язок між амплітудами заряду конденсатора, напруги на конденсаторі, сили струму у контурі, при власних коливаннях в електричному контурі.</b></p>	$I_m = q_m \omega_0 ;$ $U_m = \frac{q_m}{C} ;$ $U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}} .$
<p><b>Диференціальне рівняння затухаючих коливань в електричному контурі.</b></p>	$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 ;$ <p>де <math>\beta</math> - коефіцієнт затухання.</p>
<p><b>Коефіцієнт затухання в електричному контурі.</b></p>	$\beta = \frac{R}{2L} .$
<p><b>Циклічна частота затухаючих коливань в електричному контурі.</b></p>	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} .$
<p><b>Період затухаючих коливань в електричному контурі.</b></p>	$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} .$
<p><b>Залежність від часу заряду конденсатора, при затухаючих коливаннях в електричному контурі.</b></p>	$q = q_0 \exp\{-\beta t\} \cos(\omega t + \varphi_0) .$
<p><b>Залежність від часу напруги на конденсаторі, при затухаючих коливаннях в електричному контурі.</b></p>	$U = \frac{q_0}{C} \exp\{-\beta t\} \cos(\omega t + \varphi_0) ;$
<p><b>Залежність від часу сили струму у контурі, при затухаючих коливаннях в електричному контурі.</b></p>	$I = -q_0 \omega_0 \exp\{-\beta t\} \sin(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi) ,$ $\text{де } \begin{cases} \sin \Delta\varphi = \frac{\beta}{\omega_0} \\ \cos \Delta\varphi = \frac{\omega}{\omega_0} \end{cases} .$

<p><b>Залежність від часу амплітуд заряду конденсатора, напруги на конденсаторі, сили струму у контурі, при затухаючих коливаннях в електричному контурі.</b></p>	$q_m = q_0 \exp\{-\beta t\};$ $U_m = \frac{q_0}{C} \exp\{-\beta t\};$ $I_m = q_0 \omega_0 \exp\{-\beta t\}.$
<p><b>Логарифмічний декремент затухання в електричному контурі.</b></p>	$\lambda = \frac{\pi R}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}.$
<p><b>Добротність коливального контуру.</b></p>	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}.$
<p><b>Диференціальне рівняння вимушених коливань в електричному контурі.</b></p>	$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L} \cos \Omega t.$
<p><b>Залежність від часу заряду конденсатора при вимушених коливаннях в електричному контурі.</b></p>	$q = q_m \cos(\Omega t + \varphi_0).$
<p><b>Амплітуда заряду конденсатора при вимушених коливаннях в електричному контурі.</b></p>	$q_m = \frac{E_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$
<p><b>Амплітуда сили струму при вимушених коливаннях в електричному контурі.</b></p>	$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}$
<p><b>Резонанс в коливальному контурі – явище різкого зростання амплітуди коливань сили струму в електричному контурі при наближенні циклічної частоти зовнішньої е. р. с. до певного значення <math>\omega_{рез}</math>, яке називають резонансним значенням частоти.</b></p>	$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$

<p><b>Рівняння Максвелла в інтегральній формі.</b></p>	$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} \end{array} \right.$
<p><b>Рівняння Максвелла в диференціальній формі.</b></p>	$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. .$
<p><b>Швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі.</b></p>	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} .$
<p><b>Швидкість поширення електромагнітної хвилі у середовищі.</b></p>	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} .$
<p><b>Вектор Умова для електромагнітної хвилі.</b></p>	$\vec{j} = [\vec{E}; \vec{H}] .$
<p><b>Зв'язок між напруженістю електричного поля, напруженістю магнітного поля і швидкістю поширення плоскої електромагнітної хвилі.</b></p>	$\begin{aligned} \vec{H} &= \epsilon \epsilon_0 [\vec{v}; \vec{E}] ; \\ \vec{E} &= -\mu \mu_0 [\vec{v}; \vec{H}] . \end{aligned}$
<p><b>Зв'язок між модулями миттєвих значень векторів <math>\vec{E}</math> і <math>\vec{H}</math>.</b></p>	$H \sqrt{\mu \mu_0} = E \sqrt{\epsilon \epsilon_0} .$

Інтенсивність плоскої електромагнітної хвилі.	$J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m^2$
Ефект Доплера для електромагнітних хвиль.	$\lambda = \frac{\lambda_0 \left(1 - \frac{v_{\partial} \cos \theta}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v_{\partial}^2}{c^2}}}$ <p>де <math>\theta</math> - кут між напрямом швидкості руху джерела хвиль і відрізком, що з'єднує джерело і приймач хвиль.</p>

### Контрольні питання

1. Силві характеристики магнітного поля у точці простору.
2. Зв'язок між індукцією і напруженістю магнітного поля.
3. Магнітна проникливість середовища. Які речовини називають діамагнетиками, парамагнетиками і феромагнетиками?
4. Визначення і рівняння силових ліній магнітного поля.
5. Закон Біо – Савара – Лапласа.
6. Індукція і напруженість магнітного поля, створеного прямолінійним провідником зі струмом.
7. Індукція і напруженість магнітного поля, створеного нескінченно довгим, прямолінійним провідником зі струмом.
8. Індукція і напруженість магнітного поля на осі колового провідника зі струмом.
9. Визначення магнітного моменту.
10. Індукція і напруженість магнітного поля на осі короткого соленоїда зі струмом.
11. Індукція і напруженість магнітного поля всередині нескінченно довгого соленоїда зі струмом.
12. Індукція і напруженість магнітного поля всередині тороїда зі струмом.
13. Закон повного струму.
14. Застосування закону повного струму для знаходження напруженості магнітного поля, створеного нескінченно довгим, прямолінійним провідником зі струмом.
15. Застосування закону повного струму для знаходження напруженості магнітного поля, створеного нескінченно довгим соленоїдом зі струмом.
16. Закон Ампера.



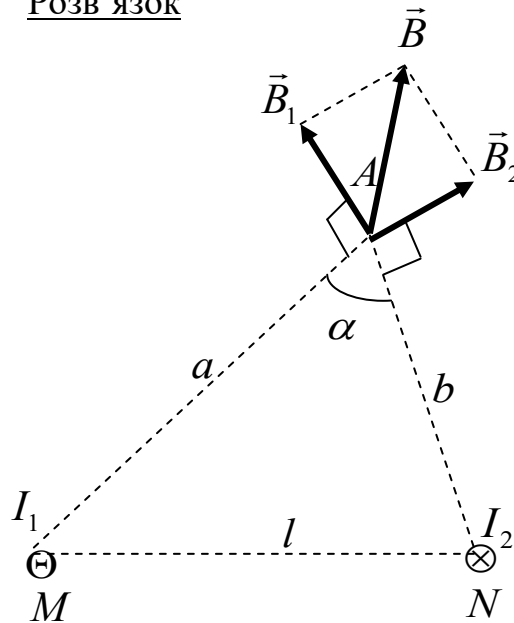
17. Який момент сил діє на провідний контур зі струмом в магнітному полі?
18. Сила Лоренца.
19. Яка траєкторія руху зарядженої частинки в однорідному магнітному полі?
20. Рух зарядженої частинки в однорідному електромагнітному полі, в якому силові лінії магнітного поля перпендикулярні до силових ліній електричного поля.
21. Як змінюються силові характеристики магнітного поля на межі двох середовищ?
22. Теорема Гауса для магнітного поля.
23. Визначення магнітного потоку.
24. Що таке власний магнітний потік? Коефіцієнт самоіндукції або індуктивність..
25. Індуктивність нескінченно довгого соленоїда.
26. Закон електромагнітної індукції. Правило Ленца.
27. Явище самоіндукції. Струми замикання і розмикання.
28. Енергія і об'ємна густина енергії магнітного поля.
29. Диференціальне рівняння власних коливань в електричному контурі та його розв'язок.
30. Чому дорівнює циклічна частота і період власних коливань в електричному контурі?
31. Диференціальне рівняння затухаючих коливань в електричному контурі та його розв'язок.
32. Чому дорівнює циклічна частота і період затухаючих коливань в електричному контурі?
33. Що таке коефіцієнт затухання, логарифмічний декремент затухання і добротність коливального контуру?
34. Диференціальне рівняння вимушених коливань в електричному контурі та його розв'язок.
35. Резонанс в електричному контурі.
36. Струм зміщення. Узагальнений закон повного струму.
37. Рівняння Максвелла в інтегральній формі.
38. Рівняння Максвелла в диференціальній формі.
39. Як з рівнянь Максвелла випливає існування електромагнітних хвиль?
40. Чому дорівнює швидкість поширення електромагнітної хвилі?
41. Рівняння плоскої електромагнітної хвилі.
42. Вектор Умова для електромагнітної хвилі.
43. Який зв'язок між миттєвими векторами напруженостей електричного і магнітного поля у плоскій електромагнітній хвилі?
44. Зв'язок між напруженістю електричного поля, напруженістю магнітного поля і швидкістю поширення електромагнітної хвилі.
45. Інтенсивність плоскої електромагнітної хвилі.
46. Ефект Доплера для електромагнітних хвиль.

## Приклади розв'язку задач з теми «Електромагнетизм»

Задача 1.1. По двом прямолінійним, нескінченно довгим і паралельним провідникам течуть електричні струми, силою 5А і 3А. Відстань між провідниками  $l = 12\text{ см}$ . Знайти індукцію магнітного поля, створеного електричними струмами у точці  $A$ . Провідники у вакуумі, відстані від провідників до точки  $A$  дорівнюють  $a = 15\text{ см}$ ;  $b = 10\text{ см}$ , відповідно.

### Розв'язок

Дано	
$I_1 = 5\text{ А}$	
$I_2 = 3\text{ А}$	
$l = 0,12\text{ м}$	
$a = 0,15\text{ м}$	
$b = 0,1\text{ м}$	
$B = ?$	



Індукція магнітного поля  $\vec{B}$  у точці  $A$  буде дорівнювати геометричній сумі індукцій магнітних полів  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$ , які створені електричними струмами  $I_1$  і  $I_2$ , відповідно:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (1)$$

Кут між векторами  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$ , як видно з рисунку дорівнює  $180^\circ - \alpha$ .

Підводячи до квадрату рівність (1), здобуваючи корінь квадратний і враховуючи, що  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ , одержимо:

$$\begin{aligned}
 B^2 &= B_1^2 + B_2^2 + 2\vec{B}_1\vec{B}_2 \\
 &\Downarrow \\
 B^2 &= B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos(180^\circ - \alpha) \\
 &\Downarrow \\
 B &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2 \cos \alpha} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Модулі векторів індукцій магнітних полів  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$ , згідно формулі (1.23),

дорівнюють:  $B_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi a}$  ;  $B_2 = \frac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi b}$  , тоді:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \sqrt{\frac{I_1^2}{a^2} + \frac{I_2^2}{b^2} - \frac{2I_1 I_2}{ab} \cos \alpha} \quad . \quad (3)$$

За теоремою косинусів з трикутника  $AMN$  маємо:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - l^2}{2ab} = \frac{0,15^2 + 0,1^2 - 0,12^2}{2 \cdot 0,15 \cdot 0,1} \approx 0,603 \quad . \quad (4)$$

Підставляючи значення косинуса (4) у формулу (3) знаходимо індукцію магнітного поля у точці  $A$  :

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \sqrt{\frac{5^2}{0,15^2} + \frac{3^2}{0,1^2} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{0,15 \cdot 0,1} \cdot 0,603} \approx 5,7 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} \quad .$$

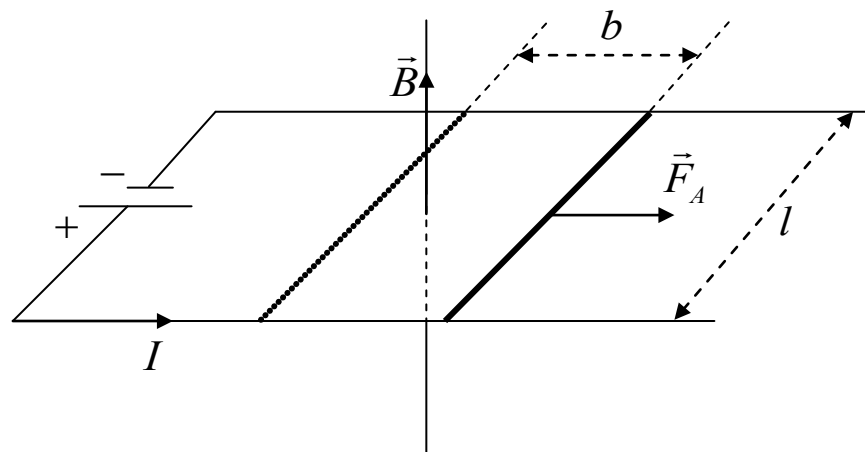
Задача 1.2. У горизонтальній площині, під дією однорідного магнітного поля з індукцією  $B$ , прямолінійний провідник довжиною  $l$ , по якому проходить електричний струм силою  $I$ , переміщується на відстань  $b$ . Силві лінії магнітного поля напрямлені вертикально вгору. Чому дорівнює робота по переміщенню провідника?

Дано:

$B, l, I, b$

$A - ?$

Розв'язок



Модуль сили Ампера, що діє на провідник, згідно виразу (1.68) дорівнює:

$$F_A = IBl \sin 90^\circ = IBl \quad . \quad (1)$$

Переміщення провідника паралельне до напрямку сили Ампера. Тоді, за означенням, робота сили дорівнює:

$$A = F_A b \cos 0 = IBlb \quad . \quad (2)$$

Добуток  $lb$ , як видно з рисунку, дорівнює зміні площі  $\Delta S$  провідного контуру, складеного з провідника, з'єднувальних провідників і джерела струму:

$$lb = \Delta S \quad . \quad (3)$$

З врахуванням рівності (3) робота сили (2) буде такою:

$$A = IBlb = IB\Delta S \quad . \quad (4)$$

Магнітний потік через контур змінюється тільки за рахунок зміни площі контуру.

Тому, зміна магнітного потоку через контур, згідно виразу (1.166), дорівнює:

$$\Delta\Phi = B\Delta S \quad . \quad (5)$$

Підставляючи рівність (5) у вираз для роботи (4) одержимо:

$$A = I\Delta\Phi \quad . \quad (6)$$

Отриманий вираз (6) є загальною формулою. Робота сил по переміщенню провідника зі струмом, або робота сил при обертанні провідного контуру зі струмом, завжди дорівнює добутку сили струму на зміну магнітного потоку через контур.

Тобто, отримана формула більш загальна, ніж розв'язок даної задачі.

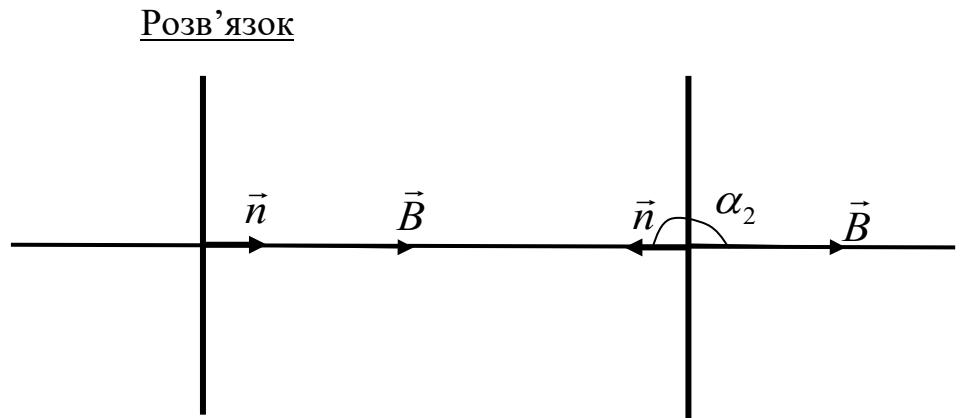
Зауваження: робота сили, що діє на заряджені частинки з боку магнітного поля дорівнює нулю (див. вираз 1.121), але суперечності з одержаним виразом для роботи по переміщенню провідника зі струмом немає. Пояснення випливає з закону електромагнітної індукції: провідник рухається, магнітний потік через контур збільшується, виникає вихрове електричне поле, яке намагається зменшити силу струму у контурі і джерело струму виконує додаткову роботу проти сил дії вихрового електричного поля, зберігаючи силу струму незмінною. Ця додаткова робота дорівнює роботі по переміщенню провідника зі струмом в магнітному полі. Іншими словами, роботу по переміщенню провідника зі струмом виконує джерело струму, а магнітне поле є посередником при виконанні роботи.

Задача 1.3. Плоска рамка площею  $10 \text{ см}^2$ , яка виготовлена з тонкого дроту, знаходиться в магнітному полі  $20 \text{ мТл}$  так, що вектор  $\vec{B}$  перпендикулярний до площини рамки. Рамку повернули на кут  $180^\circ$  навколо осі, що лежить у площині рамки й перпендикулярної до вектора індукції. На скільки змінюється при цьому магнітний потік, що пронизує рамку?

Дано:  
 $B = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$   
 $S = 10^{-3} \text{ м}^2$   
 $\alpha_1 = 0$   
 $\alpha_2 = 180^\circ$   


---

 $\Delta\Phi - ?$



Магнітний потік через рамку змінюється за рахунок зміни кута між нормаллю до площини рамки і напрямом індукції магнітного поля, тому:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS \cos \alpha_1 - BS \cos \alpha_2 = BS - (-BS) = 2BS$$

$$\Delta\Phi = 2BS = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}$$

Відповідь:  $\Phi = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}$

Задача 1.4. Магнітний потік через замкнений провідний контур, опором  $R$ , змінюється від значення  $\Phi_1$  до значення  $\Phi_2$ . Який заряд пройде через контур?

Дано:  
 $\Phi_1, \Phi_2, R$   


---

 $q - ?$

Розв'язок

При зміні магнітного потоку через замкнений провідний контур у ньому виникне е. р. с. індукції, яка за модулем дорівнює:

$$E_{\text{і}} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

і через провідний контур почне проходити індукційний струм, сила якого

за законом Ома дорівнює:  $I_{\text{і}} = \frac{E_{\text{і}}}{R} = -\frac{d\Phi}{Rdt}$ .

Використовуючи визначення сили електричного струму знаходимо величину заряду:

$$I_i = \frac{dq}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$dq = I_i dt$$

$$\Downarrow$$

$$q = \int I_i dt = -\frac{1}{R} \int \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{R} .$$

В отриманому виразі для заряду знак мінус враховує напрям індукційного струму у рамці. Найчастіше, в задачах такого типу потрібно знайти

абсолютну величину заряду, тобто:  $q = \frac{|\Phi_2 - \Phi_1|}{R}$

Задача 1.5. Рамка, що має  $N=100$  витків, обертається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B=0,01$  Тл. Площа рамки  $S=400$  см<sup>2</sup>, циклічна частота обертання  $\omega = 100\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Визначити максимальне значення ЕРС, що виникає в рамці, вісь обертання перпендикулярна до силових ліній.

Дано:

$$B = 10^{-2} \text{ Тл}$$

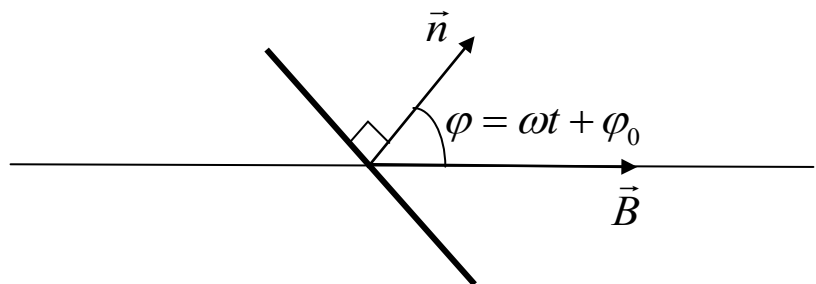
$$S = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$N = 100$$

$$E_m = ?$$

Розв'язок



$$\Phi = NBS \cos(\omega t + \varphi_0) ; E_{\tau} = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_m = NBS\omega = 10^2 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 \cdot \pi \approx 12,6 \text{ В}$$

Відповідь:  $E_m = 12,6 \text{ В}$

## РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНА І ХВИЛЬОВА ОПТИКА

У розділі «Електромагнетизм» було показано, що світло це поперечна електромагнітна хвиля.

Оптика є розділом фізики, в якому вивчають властивості і природу світла а також взаємодію світла з речовиною. У сучасній оптиці під поняттям світло розуміють електромагнітні хвилі не тільки видимого діапазону довжин хвиль:  $4 \cdot 10^{-7} - 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , а ще й досить широкі області інфрачервоного і ультрафіолетового випромінювання, що межують з діапазоном видимого світла.

Спектр електромагнітних хвиль прийнято ділити на радіохвилі, інфрачервоне, видиме, ультрафіолетове, рентгенівське і гама-випромінювання.

Радіохвилі: якщо  $\lambda > 10 \text{ км}$ , то це наддовгі радіохвилі:  $10 - 1 \text{ км}$ , це довгі радіохвилі;  $10^3 - 10^2 \text{ м}$ , це середні радіохвилі;  $100 - 10 \text{ м}$ , це короткі радіохвилі;  $\lambda < 10 \text{ м}$ , це ультракороткі радіохвилі.

Оптичний діапазон складається з трьох частин: інфрачервоне випромінювання:  $2 \cdot 10^{-3} - 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , за умовну межу між інфрачервоними хвилями і радіохвилями беруть електромагнітну хвилю, довжиною  $2 \text{ мм}$ ; видиме світло, довжина хвилі якого знаходиться в межах:  $4 \cdot 10^{-7} - 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  (довжина хвилі видимого світла визначає його колір: короткій довжині хвилі біля границі  $4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  відповідає фіолетовий колір, довгій довжині хвилі біля межі  $7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  відповідає червоний колір, решті кольорів відповідають довжини хвиль, що знаходяться між ними); ультрафіолетове випромінювання:  $4 \cdot 10^{-7} - 10^{-8} \text{ м}$ .

Умовний діапазон для рентгенівських променів складає:  $5 \cdot 10^{-8} - 7,6 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ , для гама-променів:  $\lambda < 10^{-11} \text{ м}$ .

Оптика складається з трьох частин: геометрична оптика, хвильова оптика та квантова оптика.

У геометричній оптиці закономірності поширення світла у різних середовищах та побудову зображень предметів розглядають без врахування хвильової природи світла. Закони геометричної оптики застосовують, якщо розміри перешкоди на шляху світла набагато перевищують довжину хвилі світла.

Якщо розміри перешкоди на шляху світла порядку довжини хвилі світла, то потрібно застосовувати хвильову оптику, яка спирається на хвильову природу світла.

Світлу, як показали численні експерименти, окрім хвильових властивостей притаманні властивості частинки, тобто, електромагнітна

хвиля є сукупністю порцій хвиль (квантів). Квантова оптика розглядає процеси випромінювання, поглинання світла та взаємодію світла з речовиною з точки зору квантових властивостей світла.

Основними законами геометричної оптики є закон прямолінійного поширення світла та закони відбиття і заломлення світла.

## 2.1. Закони заломлення і відбиття світла.

**Закон прямолінійного поширення світла** – в однорідному, ізотропному середовищі світло поширюється прямолінійно.

Тобто, промінь світла, який є перпендикуляром до хвильової поверхні, в однорідному, ізотропному середовищі не змінює свого напрямку.

Явища відбиття і заломлення світла спостерігаються на межі розділу двох середовищ. Швидкість руху світла у вакуумі позначатимемо через

$c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$ , а швидкість руху світла у середовищі через  $v$ .

**Абсолютний показник заломлення** – це відношення швидкості світла у вакуумі до швидкості світла у середовищі:

$$n = \frac{c}{v} \quad (2.1)$$

Розглянемо зміну напрямку руху світла на плоскій межі розділу двох однорідних середовищ, показано на рисунку 25.

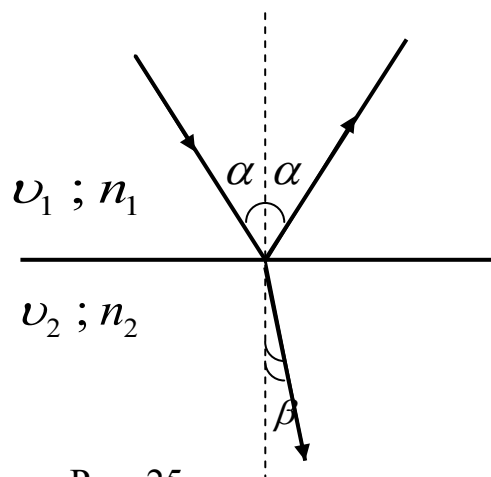


Рис. 25.

**Кутом падіння світла** називають кут між променем падаючого на межу світла і перпендикуляром до плоскої границі.

**Кутом відбиття світла** називають кут між променем відбитого від границі світла і перпендикуляром до плоскої границі.

**Кутом заломлення світла** називають кут між променем світла, що перейшло з середовища 1 у середовище 2, і перпендикуляром до плоскої границі.



Швидкість руху світла у середовищі 1 позначимо через  $v_1$ , а швидкість світла у середовищі 2 позначимо через  $v_2$ .

Тоді, абсолютні показники заломлення для середовищ будуть такими:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad ; \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad . \quad (2.2)$$

**Закони відбиття і заломлення світла** – на границі розділу двох середовищ частина світла відбивається від границі і повертається у перше середовище, частина світла заломлюється і проходить у друге середовище.

Падаючий, відбитий і заломлений проміні та перпендикуляр до границі, проведений до точки падіння світла, лежать в одній площині.

Кут падіння дорівнює куту відбиття. Кут заломлення пов'язаний з кутом падіння співвідношенням:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} \quad . \quad (2.3)$$

Оскільки, згідно виразам (2.2), відношення швидкостей світла обернене до відношення абсолютних показників заломлення:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad , \quad (2.4)$$

то закон заломлення світла (2.3) можна записати у вигляді:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad . \quad (2.5)$$

**Відносний показник заломлення** – це відношення абсолютного показника заломлення середовища, в яке переходить світло, до абсолютного показника заломлення середовища, з якого надходить світло:

$$n = \frac{n_2}{n_1} \quad . \quad (2.6)$$

Якщо світло поширюється з середовища з більшим абсолютним показником заломлення у середовище з меншим абсолютним показником заломлення ( $n_2 < n_1$ ), то на границі розділу середовищ спостерігається явище повного внутрішнього відбиття – при кутах падіння більших за певне, граничне значення світло повністю відбивається від границі і повертається у перше середовище.

На рисунку 2 показаний хід променів 1, 2 і 3 від джерела світла  $S$ , що знаходиться на дні озера. Позначимо абсолютний показник заломлення для води через  $n$ , абсолютний показник заломлення для повітря приблизно дорівнює одиниці.

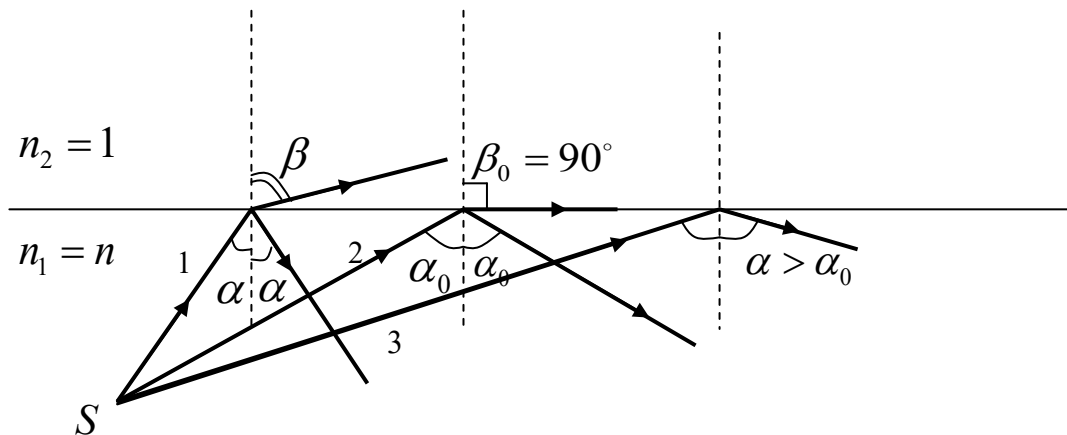


Рис.26.

Тоді, згідно закону заломлення світла (2.5), можна записати:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n} \quad (2.7)$$

Для кутів в межах від  $0$  до  $90^\circ$  синус є зростаючою функцією. Тому, з виразу (2.7) випливає, що:  $\beta > \alpha$ . Тоді, існує граничне значення кута падіння, яке позначимо через  $\alpha_0$ , для якого кут заломлення дорівнює:  $\beta_0 = 90^\circ$ . Якщо кут падіння буде більшим за критичне значення, то світло повністю відіб'ється від границі, оскільки кут заломлення не може перевищувати дев'яносто градусів. У посібниках з фізики граничне значення кута падіння  $\alpha_0$  називають граничним кутом повного внутрішнього відбиття. Значення синуса граничного кута повного внутрішнього відбиття випливає з виразу (2.7):

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin \alpha_0 = \frac{1}{n} \quad (2.8)$$

Промені, показані рисунку 26: у променя 1 кут падіння менший за граничне значення, світло частково відбивається від поверхні води, частково заломлюється і виходить у повітря; у променя 2 кут падіння дорівнює граничному куту повного внутрішнього відбиття; у променя 3 кут падіння більший за граничне значення, світло повністю відбивається від поверхні води і не виходить у повітря.

## 2.2. Поняття оптичного зображення. Побудова зображення у плоскому дзеркалі.

Якщо промені світла від точкового джерела  $P$ , після проходження оптичної системи (технічного пристрою, в якому відбувається відбиття та заломлення світла) перетинаються точці  $P'$ , то цю точку  $P'$ , називають зображенням точкового джерела світла  $P$ .

Якщо після проходження оптичної системи подовження променів світла від точкового джерела  $P$ , перетинаються точці  $P'$ , то цю точку  $P'$ , називають уявним зображенням точкового джерела світла  $P$ .

З хвильової природи світла випливає властивість зворотності напряму поширення світла.

Дійсно, якщо в деякий момент часу змінити напрям вектора напруженості електричного поля (або магнітного поля) на протилежний, то напрям поширення електромагнітної хвилі, згідно формулі (1.293), теж зміниться на протилежний, а форма променів не змінюється. Але, при зміні напрямку поширення світла, точка  $P'$  буде джерелом світла, а точка  $P$  стане зображенням джерела світла. Тобто, джерело і зображення поміняються місцями. Тому, точки  $P$  і  $P'$ , називають спряженими або взаємно спряженими точками.

У випадку, коли джерело світла знаходиться у нескінченно віддаленій від оптичної системи точці, через оптичну систему буде проходити пучок паралельних променів. Якщо у цьому випадку існує зображення джерела, то його називають фокусом сходження променів.

Перетин променів від точкового джерела світла (або подовжень променів), після проходження реальної оптичної системи, відбувається не в одній точці а в певній околиці точки, невеликого об'єму. Тобто, зображення джерела, певною мірою, «розмите».

Якщо об'єм околиці точки, в якій відбувається перетин променів від точкового джерела світла (або подовжень променів), після проходження оптичної системи, нехтовно малий, то зображення стигматичне.

Повну теорію оптичних зображень потрібно будувати, спираючись на хвильові властивості світла. Але, такий шлях занадто громіздкий і не раціональний.

Набагато простіше побудувати геометричну теорію оптичних явищ, яка спирається тільки на закони відбиття та заломлення світла, повністю відволікаючись від природи світла, а потім ввести поправки, що впливають з хвильової теорії світла.

Розглянемо побудову зображень у плоскому дзеркалі.

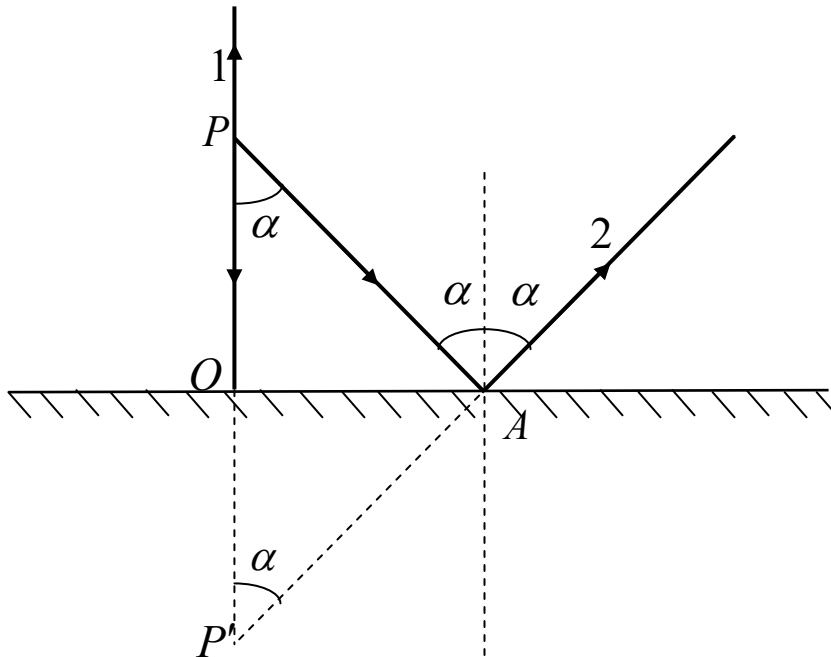


Рис. 27.

На рисунку 27 зображені два промені від джерела світла  $P$ , які відбиваються від дзеркала.

Кут падіння променя 1 дорівнює нулю (промінь перпендикулярний до поверхні дзеркала), кут падіння променя 2 дорівнює  $\alpha$ . Подовження відбитих від дзеркала променів 1 і 2 перетинаються у точці  $P'$ , яка є уявним зображенням джерела світла  $S$ .

Оскільки прямокутні трикутники  $POA$  і  $P'OA$  рівні (у них спільний катет і однаковий гострий кут), то:  $PO = P'O$ .

Таким чином:

- 1) зображення джерела світла у плоскому дзеркалі уявне;
- 2) відстань від поверхні дзеркала до уявного зображення дорівнює відстані між джерелом світла і поверхнею плоского дзеркала.
- 3) фокус сходження для плоского дзеркала знаходиться у нескінченно віддаленій точці, оскільки паралельні промені, після відбиття від плоского дзеркала, лишаються паралельними.

### 2.3. Принцип найменшого часу Ферма.

У геометричній оптиці важливу роль відіграє принцип Ферма, який вже використовувався для отримання загального хвильового рівняння (див. ч.1, додаток Г ).

**Принцип найменшого часу Ферма** – хвиля поширюється таким чином, що б час руху хвилі від однієї точки середовища до іншої був мінімальним.

Оскільки світло це електромагнітна хвиля, то принцип Ферма виконується при поширенні світла.

Наприклад, спираючись на принцип Ферма можна отримати закон заломлення світла на плоскій границі двох середовищ.

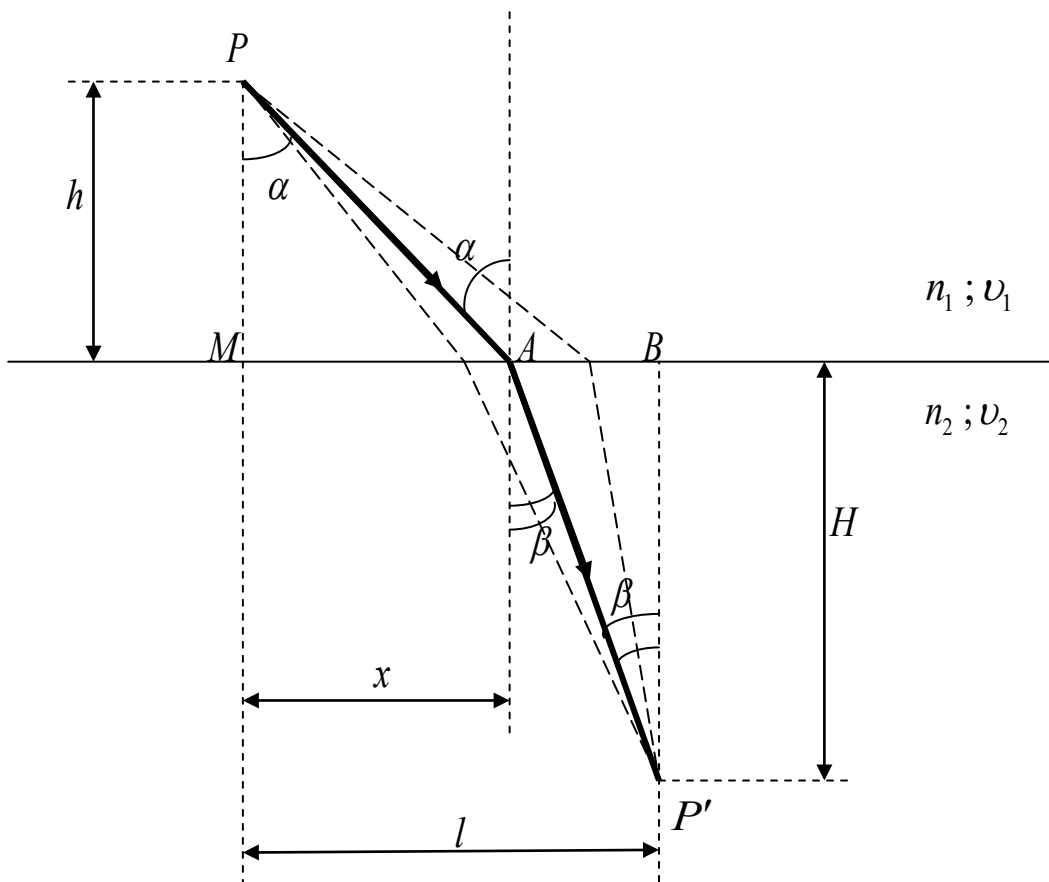


Рис. 28.

Позначимо через  $n_1$ ,  $v_1$  показник заломлення і швидкість поширення світла в середовищі 1; через  $n_2$ ,  $v_2$  показник заломлення і швидкість поширення світла в середовищі 2.

Світло від точки  $P$  до точки  $P'$  може йти різними шляхами. Кожному можливому шляху руху відповідає відстань  $x$ , показана на рисунку 28. З усіх можливих, дійсним буде шлях, якому відповідає найменший час руху.

Час руху світла  $t$  буде функцією від відстані  $x$  і дорівнює:

$$t = \frac{PA}{v_1} + \frac{AP'}{v_2} .$$

Оскільки, згідно визначенню показника заломлення:  $v_1 = \frac{c}{n_1}$ ;  $v_2 = \frac{c}{n_2}$ , то час руху (2.9) можна записати у вигляді:

$$t = \frac{1}{c} (n_1 PA + n_2 AP') . \quad (2.9)$$

При мінімальному часі руху варіація від часу руху світла  $t$  повинна дорівнювати нулю  $\delta t = 0$ , звідси випливає:

$$0 = \delta (n_1 PA + n_2 AP') . \quad (2.10)$$

З прямокутних трикутників  $PMA$  і  $P'BA$ , показаних на рисунку 28, випливає:

$$PO = \sqrt{h^2 + x^2} ; \quad PO = \sqrt{H^2 + (l-x)^2} . \quad (2.11)$$

Підставляючи вирази (2.11) у рівність (2.10) маємо:

$$0 = \delta \left( n_1 \sqrt{h^2 + x^2} + n_2 \sqrt{H^2 + (l-x)^2} \right) . \quad (2.12)$$

$\Downarrow$

$$0 = \frac{x}{v_1 \sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{l-x}{v_2 \sqrt{H^2 + (l-x)^2}}$$

$\Downarrow$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} \cdot \frac{\sqrt{H^2 + (l-x)^2}}{(l-x)} . \quad (2.13)$$

З прямокутних трикутників  $PMA$  і  $P'BA$  знаходимо:

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} ; \quad \sin \beta = \frac{l-x}{\sqrt{H^2 + (l-x)^2}} . \quad (2.14)$$

Підставляючи рівності (2.14) у вираз (2.13) одержимо:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} . \quad (2.15)$$

Одержаний вираз (2.15) збігається з законом заломлення світла (2.3).

## 2.4. Побудова зображень при заломленні та відбитті світла.

Розглянемо випадок, коли джерело і зображення світла знаходиться в різних середовищах. Поверхня розділу двох середовищ може мати різні форми.

Нехай джерело світла  $P$  знаходиться у середовищі 1, з показником заломлення  $n_1$ , а зображення  $P'$ , знаходиться у середовищі 2, показник заломлення якого  $n_2$ . Введемо поняття анабераційна поверхня.

**Анабераційна поверхня для спряжених точок**  $P$  і  $P'$  – це поверхня розділу двох середовищ, на якій всі промені від джерела  $P$ , після заломлення на поверхні, проходять через зображення джерела  $P'$ .

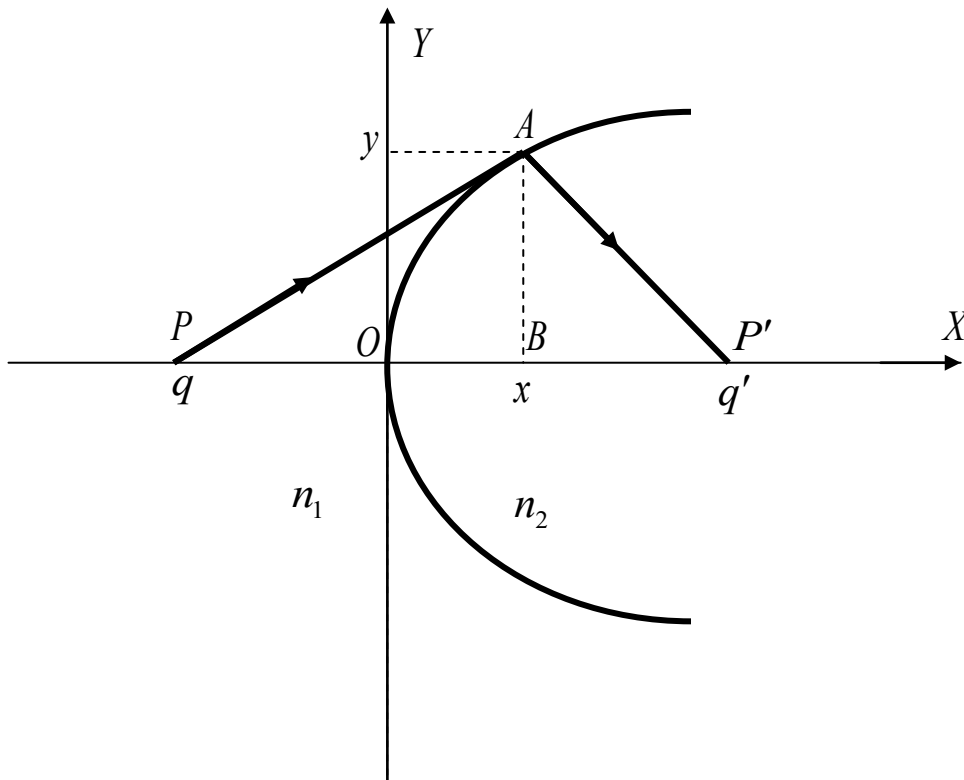


Рис. 29.

На рисунку 29 схематично зображена анабераційна поверхня для спряжених точок  $P(q, 0)$  і  $P'(q', 0)$ . Спряжені точки знаходяться на осі координат  $X$ .

Початок відліку координат знаходиться у точці перетину осі координат  $X$  з анабераційною поверхнею. Тому, відмінні від нуля тільки їх координати спряжених точок по осі  $X$ , причому  $q < 0$ ;  $q' > 0$ .

Рівняння анабераційної поверхні можна знайти наступним чином. Нехай точка  $A(x, y)$  - довільна точка абераційної поверхні. Час руху променя світла від точки  $P$  до точки  $P'$ , згідно виразу (2.9), дорівнює:

$$t = \frac{1}{c}(n_1PA + n_2AP') \quad . \quad (2.16)$$

Час руху променя через точку, нескінченно близьку до точки  $A$ , повинен дорівнювати:

$$t + \delta t = \frac{1}{c}(n_1PA + n_2AP' + \delta(n_1PA + n_2AP')) \quad , \quad (2.17)$$

де  $\delta t$  і  $\delta(n_1PA + n_2AP')$  - варіації часу і шляху руху.

Але, при заломленні у точці, нескінченно близькій до точки  $A$ , теж повинен виконуватись закон заломлення світла. Тому, варіація шляху руху дорівнює нулю (див. підрозділ 2.3):

$$\delta(n_1PA + n_2AP') = 0 \quad . \quad (2.18)$$

Оскільки варіація дорівнює нулю тільки від постійної величини, то:

$$n_1PA + n_2AP' = const \quad . \quad (2.19)$$

Одержаний вираз (2.19) це рівняння анабераційної поверхні в загальній формі.

Окрім цього, якщо дорівнює нулю варіація шляху руху, то з рівності (2.17) впливає рівність нулю і варіації часу руху.

Це означає, що час руху всіх променів світла від точки  $P$  до точки  $P'$  однаковий. Це називають **принципом таутохронізму** (принцип рівності часу).

Рівняння анабераційної поверхні (2.19) можна записати в іншому вигляді.

Нехай ліва частина рівняння (2.19) відповідає променю, що йде через точку поверхні  $A$ , а права частина рівності (2.19) відповідає променю, що йде через точку поверхні  $O$ . Тоді, з прямокутних трикутників  $PBA$  і  $P'AB$ , показаних на рисунку 29, впливає:

$$n_1\sqrt{(x-q)^2 + y^2} + n_2\sqrt{(q'-x)^2 + y^2} = n_2q' - n_1q \quad . \quad (2.20)$$

Отримане рівняння (2.20) називають рівнянням **картезіанського овалу**, це рівняння лінії, обертання якої навколо осі  $X$ , дає анабераційну поверхню.



В загальному випадку картезіанський овал це поверхня третього порядку. Але, при певних значеннях параметрів, він може бути поверхнею другого порядку.

Розглянемо важливий частинний випадок анабераційної поверхні, коли джерело світла знаходиться у нескінченно віддаленій від границі розділу середовищ точці.

Систему координат виберемо так само, як і раніше. Початок відліку координат знаходиться у точці перетину осі координат  $X$  з анабераційною поверхнею.

Спряжені точки знаходяться на осі координат  $X$ . Координату зображення по осі  $X$  позначимо через  $q'$ , координата джерела по осі  $X$  прямує до безмежності. Якщо джерело нескінченно віддалене і знаходиться на осі  $X$ , то від нього надходять промені, паралельні осі  $X$ , як показано на рисунку 30.

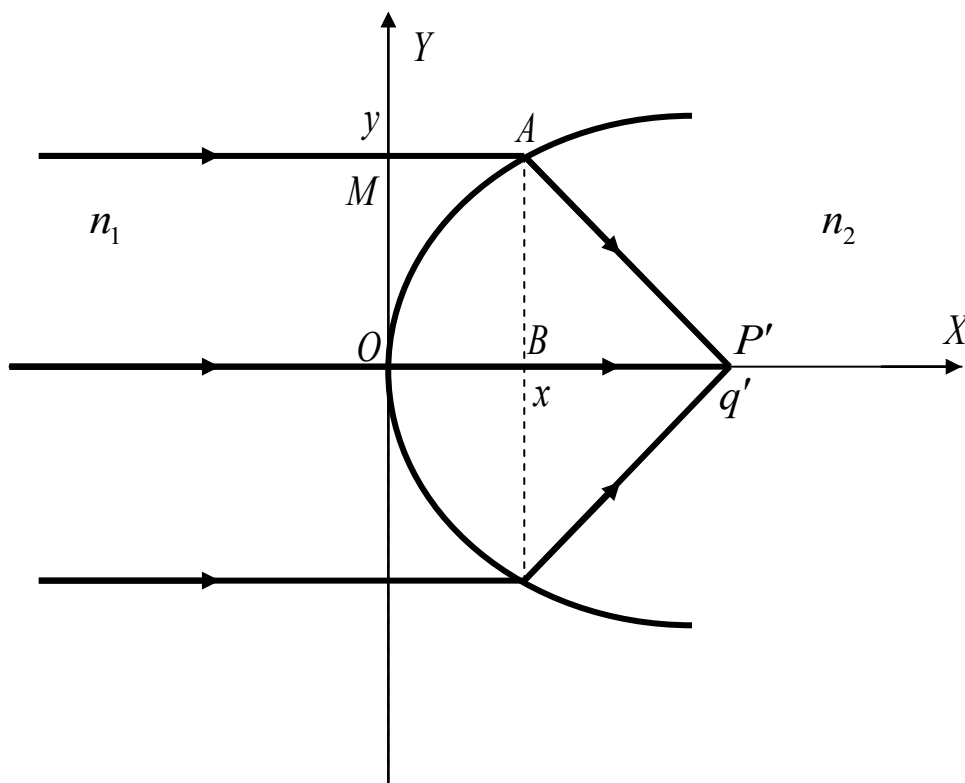


Рис. 30.

Запишемо, для цього випадку рівняння (2.19).

Ліва частина рівняння (2.19) буде відповідати променю, що йде через довільну точку поверхні  $A(x, y)$ , а права частина рівності (2.19) відповідає променю, що йде через точку поверхні  $O$ .

Якщо джерело світла нескінченно віддалене, то безмежно великі відстані  $PM$  і  $PO$  однакові:

$$PM = PO \quad , \quad (2.21)$$

$$\text{окрім цього: } PA = PM + x \quad . \quad (2.22)$$

Використовуючи теорему Піфагора для прямокутного трикутника  $P'AB$ , показаного на рисунку 30, і враховуючи рівності (2.21), (2.22) знаходимо:

$$\begin{aligned} n_1 PA + n_2 \sqrt{(q' - x)^2 + y^2} &= n_2 q' + n_1 PO \\ \Downarrow \\ \cancel{n_1 PM} + n_1 x + n_2 \sqrt{(q' - x)^2 + y^2} &= n_2 q' + \cancel{n_1 PO} \\ \Downarrow \\ n_2^2 \left( (q' - x)^2 + y^2 \right) &= (n_2 q' - n_1 x)^2 \\ \Downarrow \\ (n_2^2 - n_1^2) x^2 + n_2^2 y^2 - 2n_2 (n_2 - n_1) q' x &= 0 \quad . \quad (2.23) \end{aligned}$$

Вираз (2.23) це рівняння лінії, обертання якої навколо осі  $X$ , дасть анабераційну поверхню. Перетворимо рівняння (2.23) наступним чином:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{n_2^2 y^2}{n_2^2 - n_1^2} - \frac{2n_2 \cancel{(n_2 - n_1)} q'}{\cancel{(n_2 - n_1)} (n_2 + n_1)} x &= 0 \\ \Downarrow \\ x^2 - \frac{2n_2 q'}{(n_2 + n_1)} x + \frac{n_2^2 (q')^2}{(n_2 + n_1)^2} + \frac{n_2^2 y^2}{n_2^2 - n_1^2} &= \frac{n_2^2 (q')^2}{(n_2 + n_1)^2} \\ \Downarrow \\ \frac{\left( x - \frac{n_2 q'}{n_2 + n_1} \right)^2}{\frac{n_2^2 (q')^2}{(n_2 + n_1)^2}} + \frac{y^2}{\frac{(n_2 - n_1)(q')^2}{n_2 + n_1}} &= 1 \quad . \quad (2.24) \end{aligned}$$

В залежності від співвідношення між показниками заломлення анабераційна поверхня має різні форми.

Якщо  $n_2 > n_1$ , то множник біля  $y^2$  буде додатним і  $q' > 0$ . Після запровадження позначень:

$$a = \frac{n_2 q'}{n_2 + n_1} ; \quad b = \sqrt{\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}} q' , \quad (2.25)$$

рівняння (2.24) буде таким:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (2.26)$$

З рівняння (2.26) випливає, що при  $n_2 > n_1$  анабераційна поверхня буде еліпсоїдом (якісно, форма поверхні зображена на рисунку 30), напівосі якого  $a$  і  $b$  визначаються рівностями (2.25), **зображення (в даному випадку зображення буде фокусом) буде дійсним**, як видно з рисунку 30, а ексцентриситет  $\varepsilon$  дорівнює:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{(n_2 - n_1)(q')^2 (n_2 + n_1)^2}{(n_2 + n_1)n_2^2 (q')^2}} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2}} = \frac{n_1}{n_2} , \\ \text{тобто:} \quad \varepsilon &= \frac{n_1}{n_2} . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Якщо  $n_2 < n_1$ , то множник біля  $y^2$  буде від'ємним і  $q' < 0$ , після запровадження позначень:

$$a = \frac{n_2 q'}{n_2 + n_1} ; \quad b = -\sqrt{\frac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1}} q' , \quad (2.28)$$

рівняння (2.24) буде таким:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad (2.29)$$

З рівняння (2.29) випливає, що при  $n_2 < n_1$ , анабераційна поверхня буде гіперболоїдом обертання (якісно, форма поверхні зображена на рисунку 31), напівосі якого  $a$  і  $b$  визначаються рівностями (2.28), зображення буде уявним (в даному випадку зображення буде уявним фокусом), як видно з рисунку 31, а ексцентриситет  $\varepsilon$  дорівнює:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{(n_1 - n_2)(q')^2 (n_2 + n_1)^2}{(n_2 + n_1)n_2^2 (q')^2}} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_2^2}} = \frac{n_1}{n_2} \quad , \end{aligned}$$

тобто:  $\varepsilon = \frac{n_1}{n_2} \quad . \quad (2.30)$

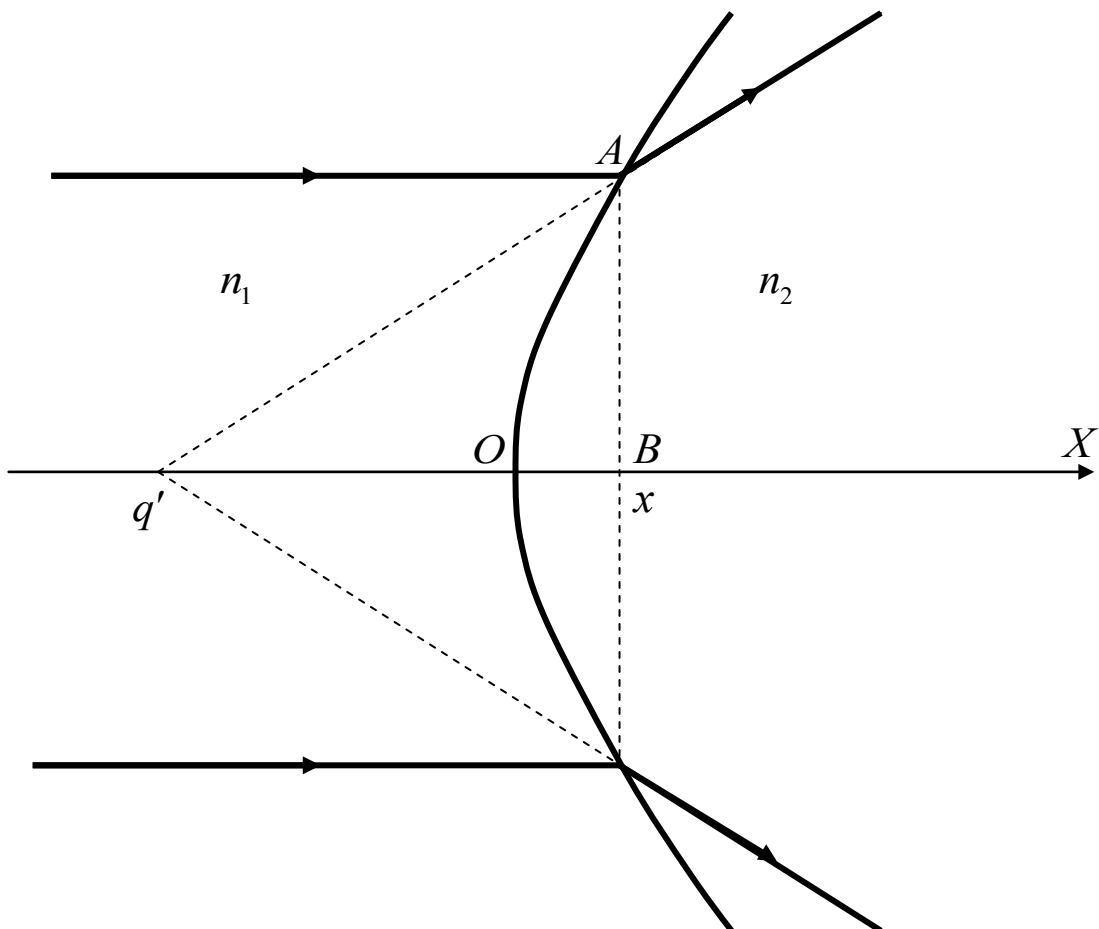


Рис. 31.

Таким чином, знайдена форма границі між двома середовищами, при якій буде існувати фокус сходження променів при заломленні світла.

Поняття анабераційна поверхня можна узагальнити і на випадок відбиття світла. Довжину подовження ходу променя, після відбиття від дзеркала, можна формально вважати від'ємною, що еквівалентно формальній заміні показника заломлення другого середовища (в яке промінь після відбиття не потрапляє) на показник заломлення першого середовища зі знаком мінус. Тобто, треба покласти:  $n_2 = -n_1$ .

Таким чином, відповідає потреба в окремому розгляді побудови зображення при відбитті світла.

Наприклад, при такій заміні виконується рівняння абераційної поверхні (2.19), у випадку відбиття від плоского дзеркала.

Дійсно, з рисунку 27 видно, що при відбитті світла від довільної точки  $A$  плоского дзеркала виконується рівність  $PA = P'A$ . Записуючи рівняння (2.19) маємо:

$$n_1 PA + n_2 AP' = n_1 PA - n_1 AP' = n_1 (PA - AP') = 0 \quad (2.31)$$

Таким чином, площина є однією з форм анабераційної поверхні при відбитті світла. Але, при такій формі поверхні, не існує фокус (або уявний фокус) для променів світла.

Іншу форму анабераційної поверхні при відбиванні світла, для якої існує фокус (уявний фокус), можна отримати, виконуючи заміну  $n_2 = -n_1$  у рівнянні (2.23):

$$(n_1^2 - n_1^2)x^2 + n_1^2 y^2 - 2(-n_1)(n_1 + n_1)q'x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 + 4q'x = 0 \quad (2.32)$$

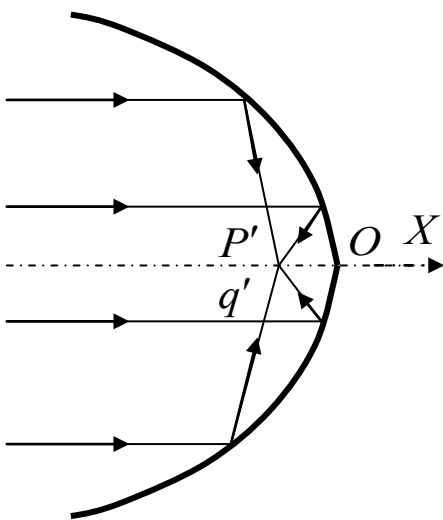


Рис. 32а.

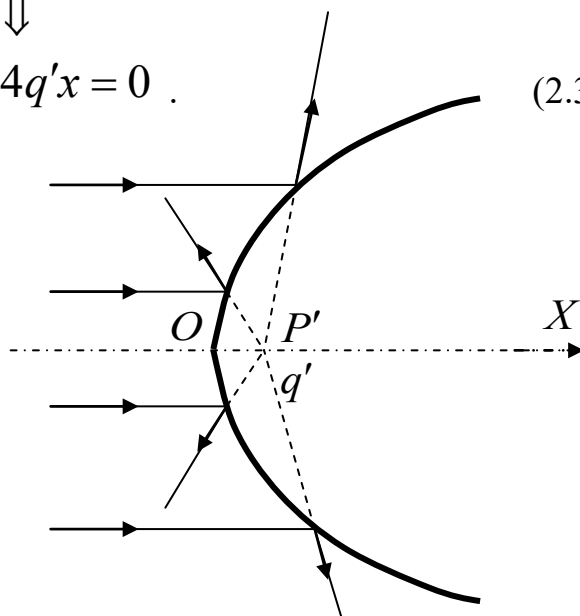


Рис. 32б.

Рівняння (2.32) це рівняння параболи, обертаня якої навколо осі координат  $X$  дає анабераційну поверхню для відбиття світла, яка є **параболоїдом обертаня**.

Якщо параболічне дзеркало має увігнуту форму, як показано на рисунку 32а, то фокус сходження променів буде дійсним, а його координата по осі  $X$  буде від'ємною:  $q' < 0$ .

Якщо параболічне дзеркало має опуклу форму, як показано на рисунку 32б, то фокус сходження променів буде уявним, а його координата по осі  $X$  буде додатною:  $q' > 0$ .

## 2.5. Заломлення та відбиття світла на сферичній поверхні. Тонкі лінзи і сферичні дзеркала.

Більшість оптичних приладів та оптичних складових частин технічних приладів відносяться до оптичних центрованих систем.

**Центрована оптична система** – це сукупність оптично однорідних заломлюючих або відбиваючих світло середовищ, відділених одна від одної сферичними поверхнями, центри яких розташовані на одній прямій.

**Головна оптична вісь** – пряма, на якій знаходяться центри сферичних поверхонь центрованої оптичної системи.

Розглянемо заломлення променя світла на сферичній поверхні, радіусу  $R$ , яка відділяє середовище з показником заломлення  $n_1$  від середовища з показником заломлення  $n_2$ .

Випадок 1. Сферична поверхня опукла,  $n_2 > n_1$ . Джерело світла дійсне і знаходиться на головній оптичній осі у точці  $P$ , як показано на рисунку 33. Вздовж головної оптичної осі напрямлена вісь координат  $X$ . Початок відліку координат знаходиться у точці перетину сферичної поверхні і головної оптичної осі.

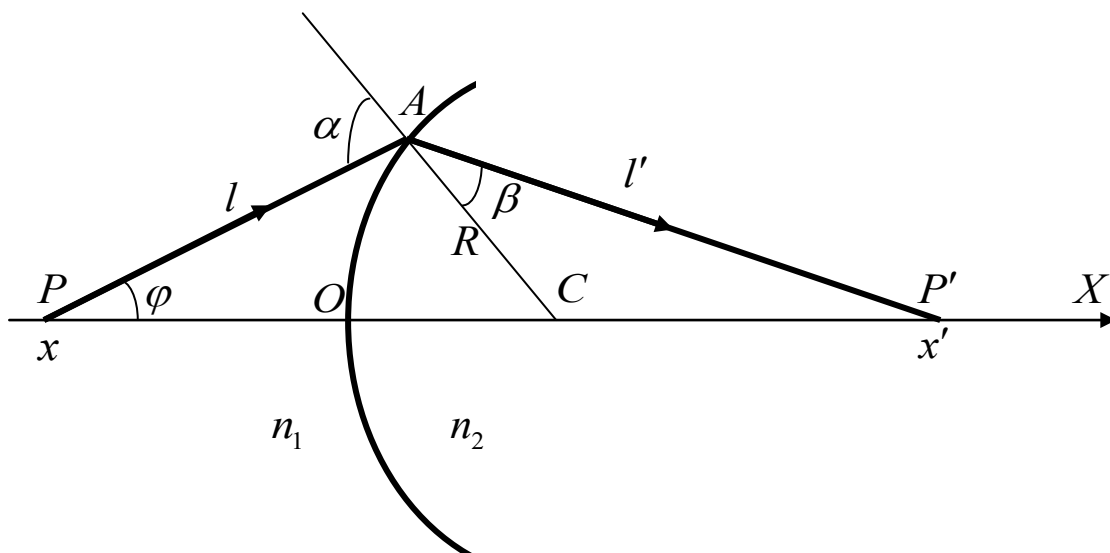


Рис. 33.

Координата точки  $P$  позначена через  $x$  (при такому виборі системи координат  $x < 0$ ), центр сферичної поверхні позначений точкою  $C$ .

Промінь світла, що виходить з джерела  $P$ , під кутом  $\varphi$  до головної оптичної осі, заломлюється на сферичній поверхні у точці  $A$  і перетинає головну оптичну вісь у точці  $P'$ , координата якої позначена через  $x'$  ( $x' > 0$ , як видно з рисунку 33). Кут падіння і кут заломлення променя світла позначені через  $\alpha$  і  $\beta$ , відповідно.

Площа трикутника  $PAP'$  дорівнює сумі площі трикутника  $PAC$  і площі трикутника  $AP'C$ :

$$S_{PAC} + S_{AP'C} = S_{PAP'} \quad . \quad (2.33)$$

Запровадимо такі позначення:  $PA = l$ ;  $AP' = l'$ . Площі трикутників, як видно з рисунку 33, дорівнюють:

$$S_{PAP'} = \frac{1}{2} l l' \sin(\alpha - \beta) \quad , \quad (2.34)$$

$$S_{PAC} = \frac{1}{2} l R \sin \alpha \quad , \quad (2.35)$$

$$S_{AP'C} = \frac{1}{2} l' R \sin \beta \quad . \quad (2.36)$$

Підставляючи площі трикутників у вираз (2.33) знаходимо:

$$l R \sin \alpha + l' R \sin \beta = l l' \sin(\alpha - \beta)$$

⇓

$$l R \sin \alpha + l' R \sin \beta = l l' (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

⇓

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta - \cos \alpha \right) \quad . \quad (2.37)$$

Згідно закону заломлення світла:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ . Тому, рівність (2.37) можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{n_2}{n_1} + \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \frac{n_2}{n_1} \cdot \cos \beta - \cos \alpha \right) . \quad (2.38)$$

Помножуючи обидві частини виразу (2.38) на  $n_1$  маємо:

$$\frac{n_2}{l'} + \frac{n_1}{l} = \frac{n_2 \cos \beta - n_1 \cos \alpha}{R} . \quad (2.39)$$

З отриманого виразу (2.39) випливає, що при зміні кута нахилу променя до головної оптичної осі  $\varphi$ , кути  $\alpha$  і  $\beta$  те ж зміняться і зміниться положення точки  $P'$  на оптичній осі.

Але, при невеликих значеннях кута  $\varphi$  малими будуть і значення кутів  $\alpha$  і  $\beta$ . Тоді, для малих значень кутів падіння і заломлення виконуються наближені рівності:

$$\cos \alpha \approx 1 ; \quad \cos \beta \approx 1 , \quad (2.40)$$

і, окрім цього, з наближених рівностей (2.40), випливають наближені рівності для відстаней  $l$  і  $l'$ :

$$l \approx -x ; \quad l' \approx x' . \quad (2.41)$$

У наближених рівностях (2.41) враховані знаки координат точок.

Використовуючи наближені рівності (2.40), (2.41) у рівнянні (2.39) маємо:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R} . \quad (2.42)$$

Згідно одержаному рівнянню (2.42) положення точки  $P'$ , не залежить від кута нахилу променя до головної оптичної осі.

Введемо поняття параксіальні промені світла.

**Параксіальні промені** – це промені світла, які поширюються під малими кутами до головної оптичної осі.

Таким чином, можна стверджувати, що в параксіальних променях світла сферична поверхня є анабераційною поверхнею і точка  $P'$  є зображенням точки  $P$ .

Випадок 2. Сферична поверхня опукла,  $n_2 > n_1$ , але джерело світла уявне, знаходиться на головній оптичній осі у точці  $P$ , як показано на



рисунку 34. Вздовж головної оптичної осі напрямлена вісь координат  $X$ . Початок відліку координат знаходиться у точці  $O$ .

Координата точки  $P$  позначена через  $x$  (при такому виборі системи координат  $x > 0$ ), центр сферичної поверхні позначений точкою  $C$ .

Промінь світла, заломлюється на сферичній поверхні у точці  $A$  і перетинає головну оптичну вісь у точці  $P'$ , координата якої позначена через  $x'$  ( $x' > 0$ , як видно з рисунку 34). Кут падіння і кут заломлення променя світла позначені через  $\alpha$  і  $\beta$ , відповідно.

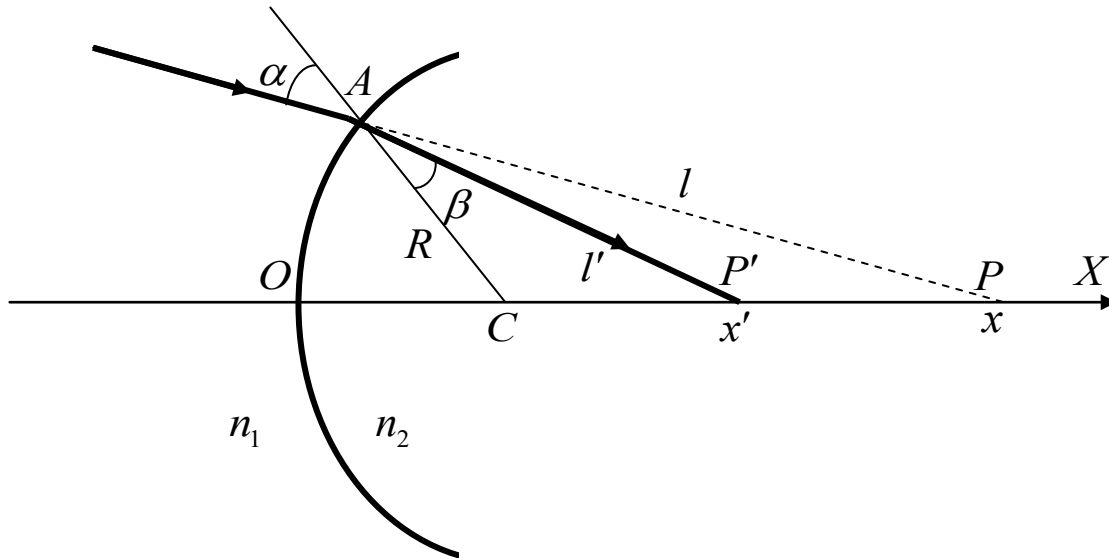


Рис. 34.

Площа трикутника  $PAC$  дорівнює сумі площі трикутника  $PAP'$  і площі трикутника  $AP'C$ :

$$S_{PAC} = S_{AP'C} + S_{PAP'} \quad . \quad (2.43)$$

Площі трикутників, як видно з рисунку 34, дорівнюють:

$$S_{PAP'} = \frac{1}{2} l' \sin(\alpha - \beta) \quad , \quad S_{PAC} = \frac{1}{2} lR \sin \alpha \quad ,$$

$$S_{AP'C} = \frac{1}{2} l'R \sin \beta \quad .$$

Підставляючи площі трикутників у вираз (2.43) знаходимо:

$$lR \sin \alpha = l'R \sin \beta + l' \sin(\alpha - \beta)$$

⇓

$$lR \sin \alpha - l'R \sin \beta = l' (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

⇓

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta - \cos \alpha \right). \quad (2.44)$$

Згідно закону заломлення світла:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ . Тому, рівність (2.44) можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{n_2}{n_1} - \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \frac{n_2}{n_1} \cdot \cos \beta - \cos \alpha \right). \quad (2.45)$$

Помножуючи обидві частини виразу (2.45) на  $n_1$  маємо:

$$\frac{n_2}{l'} - \frac{n_1}{l} = \frac{n_2 \cos \beta - n_1 \cos \alpha}{R}. \quad (2.46)$$

Використовуючи наближені рівності, справедливі для параксіальних променів:  $\cos \alpha \approx 1$  ;  $\cos \beta \approx 1$  ;  $l \approx x$  ;  $l' \approx x'$  , маємо:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (2.47)$$

Випадок 3. Сферична поверхня опукла,  $n_2 < n_1$ . Джерело світла дійсне і знаходиться на головній оптичній осі у точці  $P$ , як показано на рисунку 35. Вздовж головної оптичної осі напрямлена вісь координат  $X$ . Початок відріку координат знаходиться у точці перетину сферичної поверхні і головної оптичної осі.

Координата точки  $P$  позначена через  $x$  (при такому виборі системи координат  $x < 0$ ), центр сферичної поверхні позначений точкою  $C$ .

Промінь заломлюється на сферичній поверхні у точці  $A$  і його продовження перетинає головну оптичну вісь у точці  $P'$ , координата якої позначена через  $x'$  ( $x' < 0$ , як видно з рисунку 35). Кут падіння і кут заломлення променя світла позначені через  $\alpha$  і  $\beta$ , відповідно.

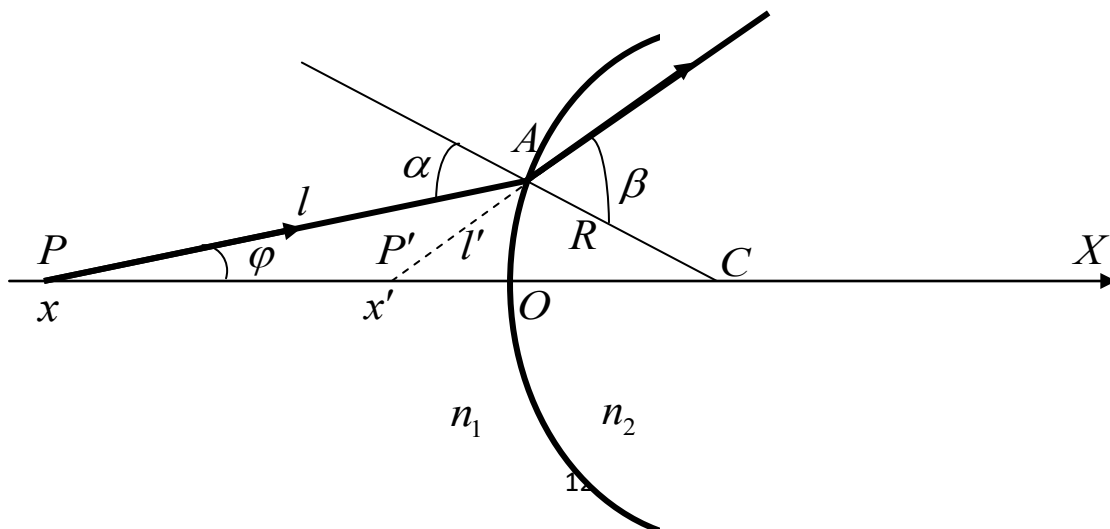


Рис.35.

Площа трикутника  $PAC$  дорівнює сумі площі трикутника  $PAP'$  і площі трикутника  $AP'C$  :

$$S_{PAC} = S_{AP'C} + S_{PAP'} \quad . \quad (2.48)$$

Площі трикутників, як видно з рисунку 35, дорівнюють:

$$S_{PAP'} = \frac{1}{2} l l' \sin(\beta - \alpha) \quad ; \quad S_{PAC} = \frac{1}{2} l R \sin \alpha \quad ,$$

$$S_{AP'C} = \frac{1}{2} l' R \sin \beta \quad .$$

Підставляючи площі трикутників у вираз (2.48) знаходимо:

$$l R \sin \alpha = l' R \sin \beta + l l' \sin(\beta - \alpha)$$

⇓

$$l R \sin \alpha - l' R \sin \beta = l l' (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha)$$

⇓

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta \right) \quad . \quad (2.49)$$

Згідно закону заломлення світла:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ . Тому, рівність (2.49) можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{n_2}{n_1} - \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \cos \alpha - \frac{n_2}{n_1} \cdot \cos \beta \right) \quad . \quad (2.50)$$

Помножуючи обидві частини виразу (2.38) на  $n_1$  маємо:

$$\frac{n_2}{l'} - \frac{n_1}{l} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{R} \quad . \quad (2.51)$$

Використовуючи наближені рівності, справедливі для параксіальних променів:  $\cos \alpha \approx 1$  ;  $\cos \beta \approx 1$  ;  $l \approx -x$  ;  $l' \approx -x'$  , маємо:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R} . \quad (2.52)$$

Випадок 4. Сферична поверхня опукла,  $n_2 < n_1$  і джерело світла уявне, знаходиться на головній оптичній осі у точці  $P$ , як показано на рисунку 36. Вздовж головної оптичної осі напрямлена вісь координат  $X$ . Початок відліку координат знаходиться у точці перетину сферичної поверхні і головної оптичної осі.

Координата точки  $P$  позначена через  $x$  (при такому виборі системи координат  $x > 0$ ), центр сферичної поверхні позначений точкою  $C$ .

Промінь світла заломлюється на сферичній поверхні у точці  $A$  і перетинає головну оптичну вісь у точці  $P'$ , координата якої позначена через  $x'$  ( $x' > 0$ , як видно з рисунку 36). Кут падіння і кут заломлення променя світла позначені через  $\alpha$  і  $\beta$ , відповідно.

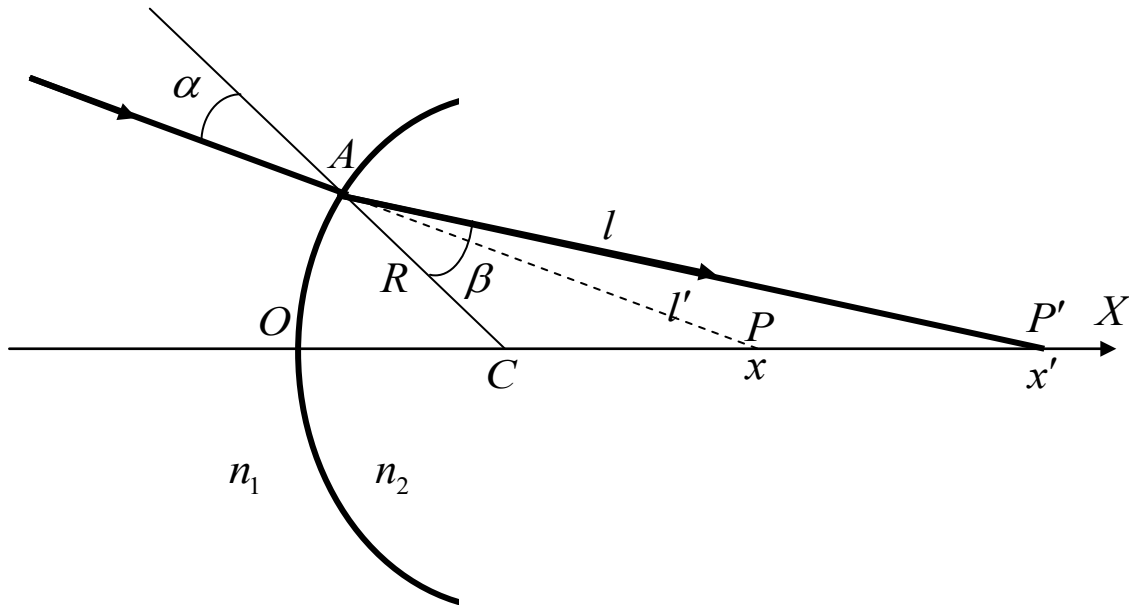


Рис. 36.

Площа трикутника  $AP'C$  дорівнює сумі площі трикутника  $PAP'$  і площі трикутника  $PAC$ :

$$S_{AP'C} = S_{PAC} + S_{PAP'} . \quad (2.53)$$

Площі трикутників, як видно з рисунку 36, дорівнюють:

$$S_{PAP'} = \frac{1}{2} ll' \sin(\beta - \alpha) , \quad S_{PAC} = \frac{1}{2} lR \sin \alpha ,$$

$$S_{AP'C} = \frac{1}{2} l' R \sin \beta .$$

Підставляючи площі трикутників у вираз (2.53) знаходимо:

$$\begin{aligned} l' R \sin \beta &= l R \sin \alpha + l' \sin(\beta - \alpha) \\ &\Downarrow \\ l' R \sin \beta - l R \sin \alpha &= l' (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{l} - \frac{1}{l'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \frac{1}{R} \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta \right) . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Згідно закону заломлення світла:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ . Тому, рівність (2.54) можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l'} \cdot \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{R} \left( \cos \alpha - \frac{n_2}{n_1} \cdot \cos \beta \right) . \quad (2.55)$$

Помножуючи обидві частини виразу (2.55) на  $n_1$  маємо:

$$\frac{n_1}{l} - \frac{n_2}{l'} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{R} . \quad (2.56)$$

Використовуючи наближені рівності, справедливі для параксіальних променів:  $\cos \alpha \approx 1$  ;  $\cos \beta \approx 1$  ;  $l \approx x$  ;  $l' \approx x'$  , маємо:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R} . \quad (2.57)$$

**Випадок 5.** Сферична поверхня увігнута,  $n_2 > n_1$ . Джерело світла дійсне і знаходиться на головній оптичній осі у точці  $P$ , як показано на рисунку 37.

Вздовж головної оптичної осі напрямлена вісь координат  $X$ . Початок відліку координат знаходиться у точці перетину сферичної поверхні і головної оптичної осі.

Координата точки  $P$  позначена через  $x$  (при такому виборі системи координат  $x < 0$ ), центр сферичної поверхні позначений точкою  $C$ .

Промінь світла, заломлюється на сферичній поверхні у точці  $A$  і перетинає головну оптичну вісь у точці  $P'$ , координата якої позначена через  $x'$  ( $x' < 0$ , як видно з рисунку 37). Кут падіння і кут заломлення променя світла позначені через  $\alpha$  і  $\beta$ , відповідно.

Площа трикутника  $PAP'$  дорівнює сумі площі трикутника  $PAC$  і площі трикутника  $AP'C$ :

$$S_{PAC} = S_{AP'C} + S_{PAP'} \quad . \quad (2.58)$$

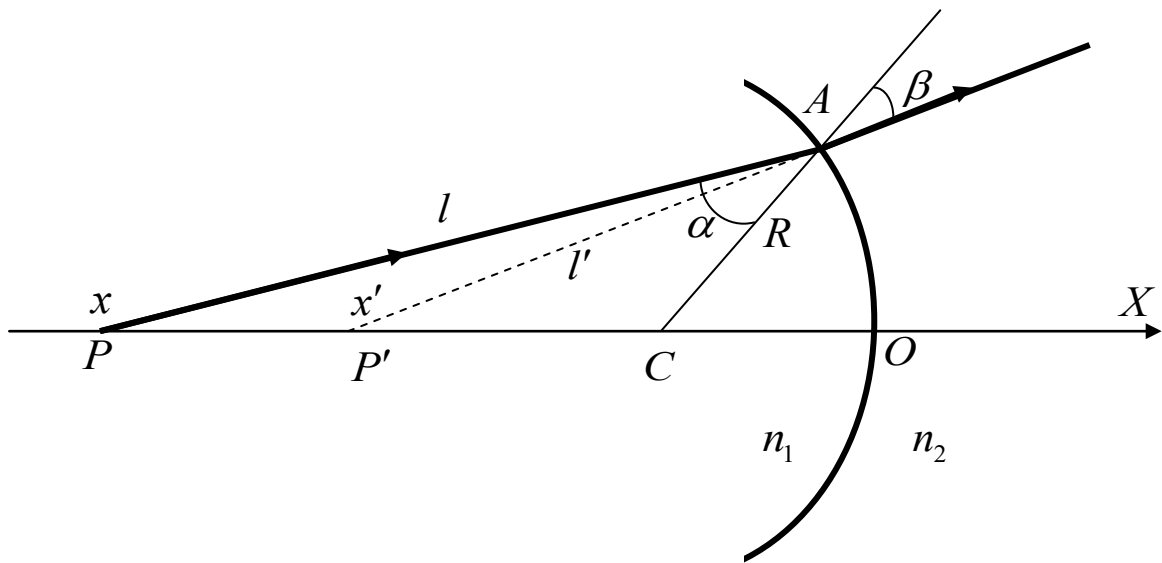


Рис. 37.

Площі трикутників, як видно з рисунку 37, дорівнюють:

$$S_{PAP'} = \frac{1}{2} l l' \sin(\alpha - \beta) \quad , \quad S_{PAC} = \frac{1}{2} l R \sin \alpha \quad ,$$

$$S_{AP'C} = \frac{1}{2} l' R \sin \beta \quad .$$

Підставляючи площі трикутників у вираз (2.58) знаходимо:

$$l R \sin \alpha = l' R \sin \beta + l l' \sin(\alpha - \beta)$$

$$\Downarrow$$

$$l R \sin \alpha - l' R \sin \beta = l l' (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta - \cos \alpha \right) . \quad (2.59)$$

Згідно закону заломлення світла:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ . Тому, рівність (2.59) можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{n_2}{n_1} - \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \frac{n_2}{n_1} \cdot \cos \beta - \cos \alpha \right) . \quad (2.60)$$

Помножуючи обидві частини виразу (2.60) на  $n_1$  маємо:

$$\frac{n_2}{l'} - \frac{n_1}{l} = \frac{n_2 \cos \beta - n_1 \cos \alpha}{R} . \quad (2.61)$$

Використовуючи наближені рівності, справедливі для параксіальних променів:  $\cos \alpha \approx 1$  ;  $\cos \beta \approx 1$  ;  $l \approx -x$  ;  $l' \approx -x'$  , маємо:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = - \frac{(n_2 - n_1)}{R} . \quad (2.62)$$

Випадок 6. Сферична поверхня увігнута,  $n_2 > n_1$ , але джерело світла уявне, знаходиться на головній оптичній осі у точці  $P$ , як показано на рисунку 38. Вздовж головної оптичної осі напрямлена вісь координат  $X$ . Початок відліку координат знаходиться у точці  $O$ .

Координата точки  $P$  позначена через  $x$  (при такому виборі системи координат  $x > 0$ ), центр сферичної поверхні позначений точкою  $C$ .

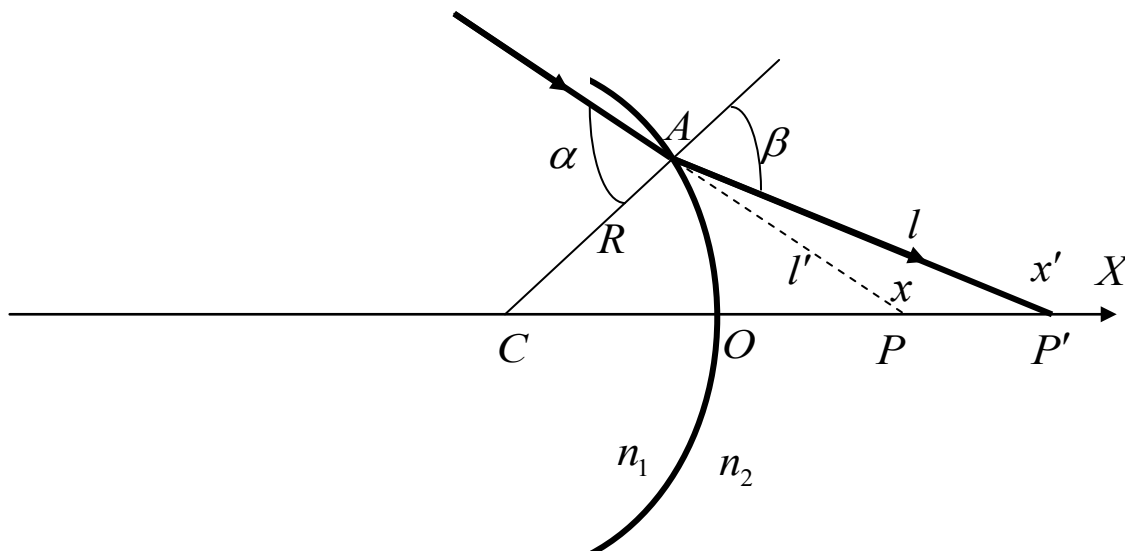


Рис. 38.

Промінь світла, заломлюється на сферичній поверхні у точці  $A$  і перетинає головну оптичну вісь у точці  $P'$ , координата якої позначена через  $x'$  ( $x' > 0$ , як видно з рисунку 38). Кут падіння і кут заломлення променя світла позначені через  $\alpha$  і  $\beta$ , відповідно.

Площа трикутника  $AP'C$  дорівнює сумі площі трикутника  $PAP'$  і площі трикутника  $PAC$  :

$$S_{AP'C} = S_{PAP'} + S_{PAC} \quad . \quad (2.63)$$

Площі трикутників, як видно з рисунку 38, дорівнюють:

$$S_{PAP'} = \frac{1}{2} l' \sin(\alpha - \beta) \quad , \quad S_{PAC} = \frac{1}{2} lR \sin \alpha \quad ,$$

$$S_{AP'C} = \frac{1}{2} l'R \sin \beta \quad .$$

Підставляючи площі трикутників у вираз (2.63) знаходимо:

$$l'R \sin \beta = lR \sin \alpha + l' \sin(\alpha - \beta)$$

$$\Downarrow$$

$$l'R \sin \beta - lR \sin \alpha = l'(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{R} \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta - \cos \alpha \right) \quad . \quad (2.64)$$

Згідно закону заломлення світла:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ . Тому, рівність (2.64) можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l'} \cdot \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{R} \left( \frac{n_2}{n_1} \cdot \cos \beta - \cos \alpha \right) \quad . \quad (2.65)$$

Помножуючи обидві частини виразу (2.45) на  $n_1$  маємо:

$$\frac{n_1}{l} - \frac{n_2}{l'} = \frac{n_2 \cos \beta - n_1 \cos \alpha}{R} \quad . \quad (2.66)$$



Використовуючи наближені рівності, справедливі для параксіальних променів:  $\cos \alpha \approx 1$  ;  $\cos \beta \approx 1$  ;  $l \approx x$  ;  $l' \approx x'$  , маємо:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = -\frac{n_2 - n_1}{R} . \quad (2.67)$$

Випадок 7. Сферична поверхня увігнута,  $n_2 < n_1$ . Джерело світла дійсне і знаходиться на головній оптичній осі у точці  $P$ , як показано на рисунку 39. Вздовж головної оптичної осі напрямлена вісь координат  $X$ . Початок відліку координат знаходиться у точці перетину сферичної поверхні і головної оптичної осі.

Координата точки  $P$  позначена через  $x$  (при такому виборі системи координат  $x < 0$ ), центр сферичної поверхні позначений точкою  $C$ .

Промінь заломлюється на сферичній поверхні у точці  $A$  і перетинає головну оптичну вісь у точці  $P'$ , координата якої позначена через  $x'$  ( $x' > 0$ , як видно з рисунку 39). Кут падіння і кут заломлення променя світла позначені через  $\alpha$  і  $\beta$ , відповідно.

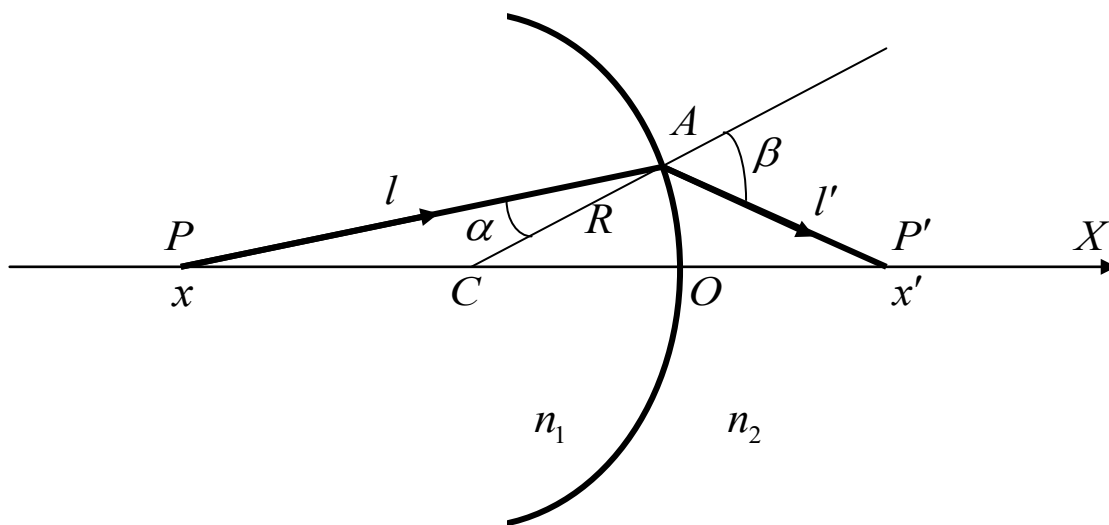


Рис.39.

Площа трикутника  $PAP'$  дорівнює сумі площі трикутника  $PAC$  і площі трикутника  $AP'C$  :

$$S_{PAC} + S_{AP'C} = S_{PAP'} . \quad (2.68)$$

Площі трикутників, як видно з рисунку 39, дорівнюють:

$$S_{PAP'} = \frac{1}{2} l l' \sin(\beta - \alpha) ; \quad S_{PAC} = \frac{1}{2} l R \sin \alpha ,$$

$$S_{AP'C} = \frac{1}{2} l' R \sin \beta .$$

Підставляючи площі трикутників у вираз (2.68) знаходимо:

$$\begin{aligned} lR \sin \alpha + l'R \sin \beta &= ll' \sin (\beta - \alpha) \\ \Downarrow \\ lR \sin \alpha + l'R \sin \beta &= ll' (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) \\ \Downarrow \\ \frac{1}{l'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{1}{l} &= \frac{1}{R} \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta \right) . \end{aligned} \quad (2.69)$$

Згідно закону заломлення світла:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ . Тому, рівність (2.69) можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{n_2}{n_1} + \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \cos \alpha - \frac{n_2}{n_1} \cdot \cos \beta \right) . \quad (2.70)$$

Помножуючи обидві частини виразу (2.70) на  $n_1$  маємо:

$$\frac{n_2}{l'} + \frac{n_1}{l} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{R} . \quad (2.71)$$

Використовуючи наближені рівності, справедливі для параксіальних променів:  $\cos \alpha \approx 1$  ;  $\cos \beta \approx 1$  ;  $l \approx -x$  ;  $l' \approx x'$  , маємо:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = -\frac{n_2 - n_1}{R} . \quad (2.72)$$

Випадок 8. Сферична поверхня увігнута,  $n_2 < n_1$ , джерело світла уявне, знаходиться на головній оптичній осі у точці  $P$ , як показано на рисунку 40. Вздовж головної оптичної осі напрямлена вісь координат  $X$ . Початок відліку координат знаходиться у точці перетину сферичної поверхні і головної оптичної осі.

Координата точки  $P$  позначена через  $x$  (при такому виборі системи координат  $x > 0$ ), центр сферичної поверхні позначений точкою  $C$ .

Промінь світла заломлюється на сферичній поверхні у точці  $A$  і перетинає головну оптичну вісь у точці  $P'$ , координата якої позначена через  $x'$  ( $x' > 0$ , як видно з рисунку 40). Кут падіння і кут заломлення променя світла позначені через  $\alpha$  і  $\beta$ , відповідно.

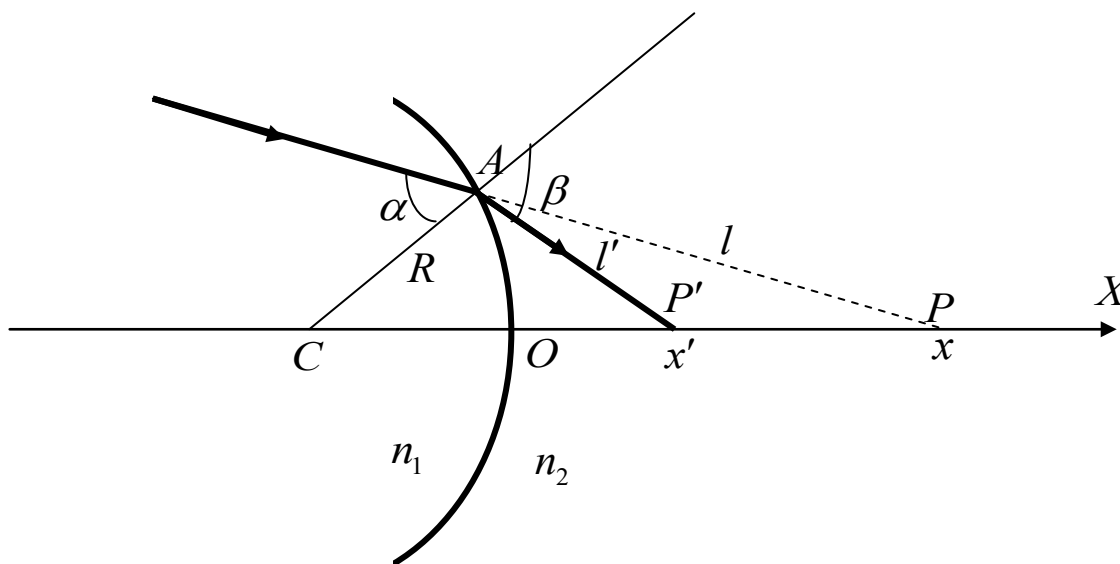


Рис. 40.

Площа трикутника  $PAC$  дорівнює сумі площі трикутника  $PAP'$  і площі трикутника  $AP'C$ :

$$S_{PAC} = S_{AP'C} + S_{PAP'} \quad . \quad (2.73)$$

Площі трикутників, як видно з рисунку 40, дорівнюють:

$$S_{PAP'} = \frac{1}{2} l' \sin(\beta - \alpha) \quad , \quad S_{PAC} = \frac{1}{2} lR \sin \alpha \quad ,$$

$$S_{AP'C} = \frac{1}{2} l'R \sin \beta \quad .$$

Підставляючи площі трикутників у вираз (2.73) знаходимо:

$$lR \sin \alpha = l'R \sin \beta + l' \sin(\beta - \alpha)$$

⇓

$$lR \sin \alpha - l'R \sin \beta = ll' (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha)$$

⇓

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta \right) . \quad (2.74)$$

Згідно закону заломлення світла:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ . Тому, рівність (2.74) можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{l'} \cdot \frac{n_2}{n_1} - \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left( \cos \alpha - \frac{n_2}{n_1} \cdot \cos \beta \right) . \quad (2.75)$$

Помножуючи обидві частини виразу (2.75) на  $n_1$  маємо:

$$\frac{n_2}{l'} - \frac{n_1}{l} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{R} . \quad (2.76)$$

Використовуючи наближені рівності, справедливі для параксіальних променів:  $\cos \alpha \approx 1$  ;  $\cos \beta \approx 1$  ;  $l \approx x$  ;  $l' \approx x'$  , маємо:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = - \frac{n_2 - n_1}{R} . \quad (2.77)$$

Порівнюючи кінцеві формули у випадках 1-8 бачимо, що при опуклій формі сферичної поверхні координати джерела і зображення пов'язані формулою (2.42), при увігнутій формі сферичної поверхні координати джерела і зображення пов'язані формулою (2.77), у всіх можливих випадках.

**Загальний, геометричний метод побудови зображень в оптичних системах полягає у наступному:** зображення або уявне зображення, отримане на першій заломлюючій або відбиваючій поверхні, можна вважати джерелом світла для другої поверхні. Зображення, отримане на другій поверхні, можна вважати джерелом світла для третьої поверхні і так далі.

Таким чином, шляхом послідовної побудови, можна отримати зображення джерела, після проходження світла через оптичну систему.

Однією з найбільш популярних складових частин оптичних пристроїв є лінза.

**Лінза** – це тіло, з прозорої речовини, яке має сферичні бічні грані.

Фактично, у лінзі середовище з показником заломлення  $n_2$  (найчастіше скло) відокремлено від середовища з показником  $n_1$  (найчастіше повітря) сферичними поверхнями.

Пряма, яка проходить через центри двох сферичних поверхонь і є віссю симетрії для обох поверхонь, це головна оптична вісь лінзи.

Головна оптична вісь перетинає сферичні поверхні у двох точках, які позначимо через  $O_1$  ;  $O_2$  відстань між цими двома точками називають товщиною лінзи.

Виберемо напрям осі координат  $X$  вздовж головної оптичної осі лінзи, початок відліку координати виберемо у точці  $O$ , посередині відрізка, що з'єднує точки  $O_1$  ;  $O_2$ . Точку  $O$ , називають **оптичним центром лінзи**.

Серед типів лінз можна виділити тонкі лінзи.

**Тонкі лінзи** – це лінзи, товщина яких нехтовно мала, у порівнянні з відстанню між лінзою і джерелом світла та відстанню між лінзою і зображенням.

Для тонких лінз можна наближено вважати, що точки  $O_1$  ;  $O_2$  збігаються з точкою  $O$ , оптичним центром лінзи.

Зв'язок між координатою джерела світла і координатою його зображення у тонкій лінзі називають формулою тонкої лінзи.

Знайдемо формулу тонкої лінзи для різних комбінацій опуклості і увігнутості сферичних поверхонь лінзи.

1) На рисунку 41 зображена тонка лінза, у якої перша сферична поверхня опукла, друга сферична поверхня увігнута. Промені світла на лінзу падають зліва.

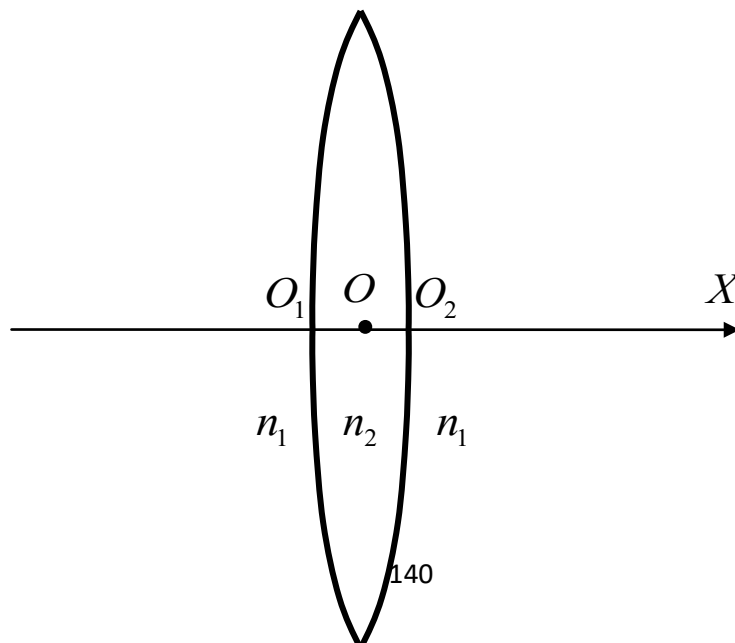


Рис. 41.

Позначимо через  $R_1$  ;  $R_2$  радіуси першої і другої сферичної поверхні, відповідно.

Для першої, опуклої сферичної поверхні, згідно розглянутим раніше випадкам побудови зображень при заломленні на сферичній поверхні, можна записати:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (2.78)$$

де через  $x$  позначена координата джерела, через  $x'$  позначена координата зображення.

Згідно загальному правилу побудови зображення в оптичних системах, для другої, увігнутої сферичної поверхні джерелом світла буде зображення джерела, отримане при заломленні на першій сферичній поверхні. Окрім цього, для другої, увігнутої сферичної поверхні показники заломлення міняються місцями, тому:

$$\frac{n_1}{x''} - \frac{n_2}{x'} = -\frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (2.79)$$

де через  $x''$  позначена координата зображення, після заломлення на другій сферичній поверхні.

Складаючи вирази (2.78) і (2.79) маємо:

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{n_2}{x'}} - \frac{n_1}{x} + \frac{n_1}{x''} - \cancel{\frac{n_2}{x'}} &= \frac{n_2 - n_1}{R_1} - \frac{n_1 - n_2}{R_2} \\ \Downarrow \\ \frac{n_1}{x''} - \frac{n_1}{x} &= (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ \Downarrow \\ \frac{1}{x''} - \frac{1}{x} &= \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.80) \end{aligned}$$

Позначимо через  $F$  координату фокусу лінзи. Якщо спрямувати координату джерела до безмежності  $x \rightarrow \infty$ , то координата зображення буде координатою фокусу лінзи  $x'' \rightarrow F$ . З виразу (2.80) знаходимо:

$$\frac{1}{F} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \quad (2.81)$$

У даному випадку, при  $n_2 > n_1$ , координата фокусу буде додатною. Це означає, що фокус лінзи дійсний.

Якщо змінити напрям променів світла і напрям осі координат на протилежний, то формула (2.81) для координати фокусу не зміниться. Звідси випливає, що у даному випадку лінза має два головні фокуси, які розташовані симетрично, відносно лінзи, на оптичній осі.

Використовуючи позначення (2.81) вираз (2.80) можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{x''} - \frac{1}{x} = \frac{1}{F} . \quad (2.82)$$

Одержаний вираз (2.82) є формулою тонкої лінзи.

Величину, обернену до координати фокусу називають оптичною силою лінзи:

$$D = \frac{1}{F} . \quad (2.83)$$

Оптична сила лінзи може бути як додатною, так і від'ємною, відповідно до знаку координати фокусу. Для випадку, зображеного на рисунку 41 (при  $n_2 > n_1$ ), оптична сила лінзи буде додатною. В системі СІ оптичну силу вимірюють в діоптріях:  $[D] = \text{дптр}$ .

2) На рисунку 42 зображена тонка лінза, у якої перша сферична поверхня увігнута, друга сферична поверхня опукла. Промені світла на лінзу падають зліва.

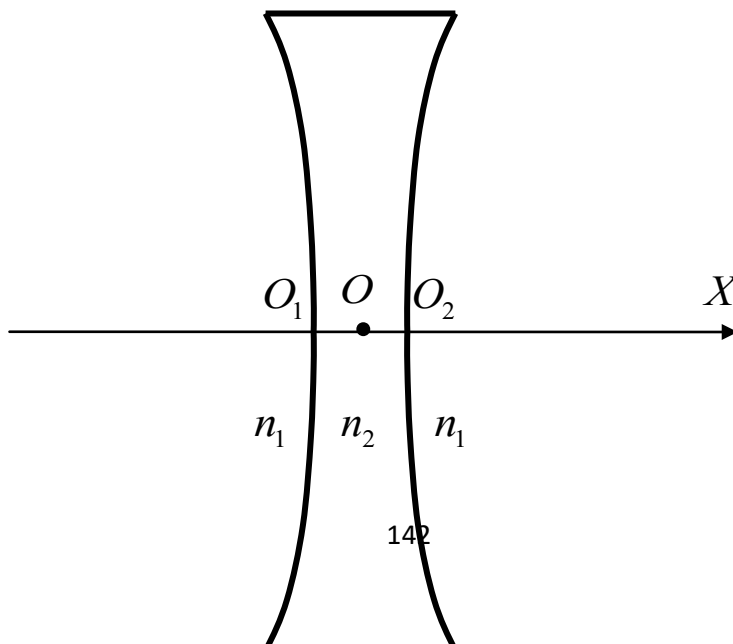


Рис. 42.

Як і в першому випадку, позначимо через  $R_1$ ;  $R_2$  радіуси першої і другої сферичної поверхні, відповідно.

Для першої, угнутої сферичної поверхні, згідно розглянутим раніше випадкам побудови зображень при заломленні на сферичній поверхні, можна записати:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = -\frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (2.84)$$

де через  $x$  позначена координата джерела, через  $x'$  позначена координата зображення.

Згідно загальному правилу побудови зображення в оптичних системах, для другої, опуклої сферичної поверхні джерелом світла буде зображення джерела, отримане при заломленні на першій сферичній поверхні. Окрім цього, для другої, опуклої сферичної поверхні показники заломлення міняються місцями, тому:

$$\frac{n_1}{x''} - \frac{n_2}{x'} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (2.85)$$

де через  $x''$  позначена координата зображення, після заломлення на другій сферичній поверхні.

Складаючи вирази (2.84) і (2.85) маємо:

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{n_2}{x'}} - \frac{n_1}{x} + \frac{n_1}{x''} - \cancel{\frac{n_2}{x'}} &= -\frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2} \\ \Downarrow \\ \frac{n_1}{x''} - \frac{n_1}{x} &= -(n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ \Downarrow \\ \frac{1}{x''} - \frac{1}{x} &= -\left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.86) \end{aligned}$$

Позначимо через  $F$  координату фокусу лінзи. Якщо спрямувати координату джерела до безмежності  $x \rightarrow \infty$ , то координата зображення буде координатою фокусу лінзи  $x'' \rightarrow F$ . З виразу (2.86) знаходимо:



$$\frac{1}{F} = - \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.87)$$

Якщо використати позначення (2.87), то формула тонкої лінзи буде мати вигляд:

$$\frac{1}{x''} - \frac{1}{x} = \frac{1}{F}. \quad (2.88)$$

Тобто, загальний вигляд формули тонкої лінзи не зміниться, але координата фокусу буде іншою.

У випадку зображеному на рисунку 42, при  $n_2 > n_1$ , координата фокусу буде від'ємною. Це означає, що фокус лінзи уявний а оптична сила лінзи від'ємна.

Якщо змінити напрям променів світла і напрям осі координат на протилежний, то формула (2.87) для координати фокусу не зміниться. Звідси випливає, що у даному випадку лінза теж має два головні фокуси, які розташовані симетрично, відносно лінзи, на оптичній осі.

3) На рисунку 43 зображена тонка лінза, у якої перша і друга сферичні поверхні увігнуті. Промені світла на лінзу падають зліва.

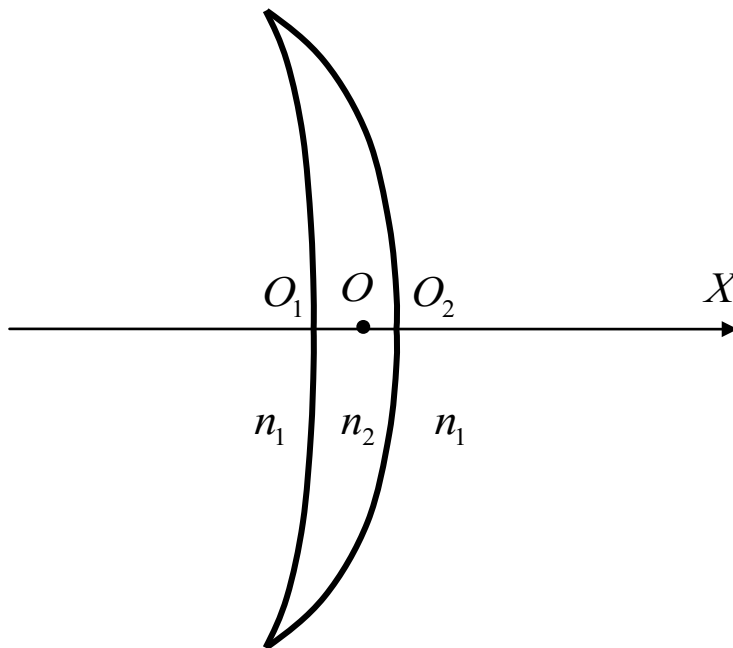


Рис. 43.

Як і в першому випадку, позначимо через  $R_1$  ;  $R_2$  радіуси першої і другої сферичної поверхні, відповідно. Очевидно, що  $R_1 > R_2$  .

Для першої, угнутої сферичної поверхні, згідно розглянутим раніше випадкам побудови зображень при заломленні на сферичній поверхні, можна записати:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = -\frac{n_2 - n_1}{R_1} . \quad (2.89)$$

де через  $x$  позначена координата джерела, через  $x'$  позначена координата зображення.

Згідно загальному правилу побудови зображення в оптичних системах, для другої, угнутої сферичної поверхні джерелом світла буде зображення джерела, отримане при заломленні на першій сферичній поверхні. Окрім цього, для другої, угнутої сферичної поверхні показники заломлення міняються місцями, тому:

$$\frac{n_1}{x''} - \frac{n_2}{x'} = -\frac{n_1 - n_2}{R_2} . \quad (2.90)$$

де через  $x''$  позначена координата зображення, після заломлення на другій сферичній поверхні.

Складаючи вирази (2.89) і (2.90) маємо:

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{n_2}{x'}} - \frac{n_1}{x} + \frac{n_1}{x''} - \cancel{\frac{n_2}{x'}} &= -\frac{n_2 - n_1}{R_1} - \frac{n_1 - n_2}{R_2} \\ &\Downarrow \\ \frac{n_1}{x''} - \frac{n_1}{x} &= (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{x''} - \frac{1}{x} &= \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) . \end{aligned} \quad (2.91)$$

Позначимо через  $F$  координату фокусу лінзи. Якщо спрямувати координату джерела до безмежності  $x \rightarrow \infty$ , то координата зображення буде координатою фокусу лінзи  $x'' \rightarrow F$ . З виразу (2.91) знаходимо:

$$\frac{1}{F} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) . \quad (2.92)$$

Якщо використати позначення (2.92), то формула тонкої лінзи буде мати вигляд:

$$\frac{1}{x''} - \frac{1}{x} = \frac{1}{F} . \quad (2.93)$$

Тобто, загальний вигляд формули тонкої лінзи не зміниться, але координата фокусу буде іншою.

У випадку зображеному на рисунку 43, при  $n_2 > n_1$ , координата фокусу буде додатною. Це означає, що фокус лінзи дійсний і оптична сила лінзи додатна.

4) На рисунку 44 зображена тонка лінза, у якої перша і друга сферичні поверхні опуклі. Промені світла на лінзу падають зліва.

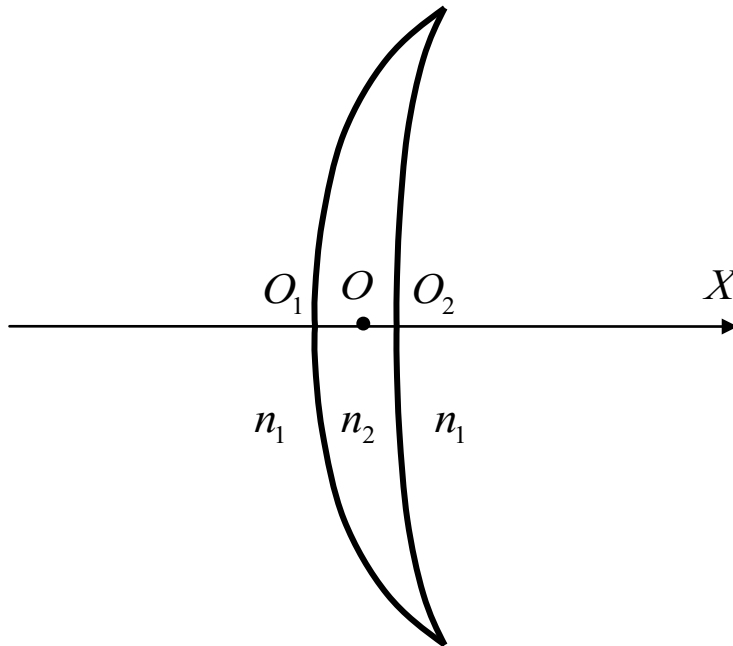


Рис. 44.

Позначимо через  $R_1$  радіус першої сферичної поверхні; через  $R_2$  - радіус другої сферичної поверхні. Очевидно, що  $R_1 < R_2$ .

Для першої, опуклої сферичної поверхні, згідно розглянутим раніше випадкам побудови зображень при заломленні на сферичній поверхні, можна записати:

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (2.94)$$

де через  $x$  позначена координата джерела, через  $x'$  позначена координата зображення.

Згідно загальному правилу побудови зображення в оптичних системах, для другої, опуклої сферичної поверхні джерелом світла буде зображення джерела, отримане при заломленні на першій сферичній поверхні. Окрім цього, для другої, опуклої сферичної поверхні показники заломлення міняються місцями, тому:

$$\frac{n_1}{x''} - \frac{n_2}{x'} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (2.95)$$

де через  $x''$  позначена координата зображення, після заломлення на другій сферичній поверхні.

Складаючи вирази (2.94) і (2.95) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{n_2}}{x'} - \frac{n_1}{x} + \frac{n_1}{x''} - \frac{\cancel{n_2}}{x'} &= \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2} \\ \Downarrow \\ \frac{n_1}{x''} - \frac{n_1}{x} &= (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \Downarrow \\ \frac{1}{x''} - \frac{1}{x} &= \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Позначимо через  $F$  координату фокусу лінзи. Якщо спрямувати координату джерела до безмежності  $x \rightarrow \infty$ , то координата зображення буде координатою фокусу лінзи  $x'' \rightarrow F$ . З виразу (2.91) знаходимо:

$$\frac{1}{F} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.97)$$

Якщо використати позначення (2.97), то формула тонкої лінзи буде мати вигляд:

$$\frac{1}{x''} - \frac{1}{x} = \frac{1}{F}. \quad (2.93)$$

Тобто, загальний вигляд формули тонкої лінзи не зміниться, але координата фокусу буде іншою.

У випадку зображеному на рисунку 44, при  $n_2 > n_1$ , координата фокусу буде додатною. Це означає, що фокус лінзи дійсний і оптична сила лінзи додатна.

Узагальнюючи, можна сказати, тонка лінза завжди має два фокуси або уявні фокуси, симетрично розташовані відносно оптичного центру лінзи.

Формулу тонкої лінзи часто пишуть в іншій формі, використовуючи інші величини:

$d$  - відстань між джерелом і лінзою,  $d = |x|$  ;

$f$  - відстань між лінзою і зображенням,  $f = |x''|$  ;

під величиною  $F$  розуміють відстань між фокусом і лінзою, яку називають фокусна відстань.

Оскільки відстані не від'ємні, то використання у формулі тонкої лінзи відстаней  $d$ ;  $f$  і  $F$  потребує застосування додаткового правила знаків: відстані у формулі беруть зі знаком плюс, якщо вони відповідають дійсному джерелу, дійсному зображенню, дійсному фокусу; відстані у формулі беруть зі знаком мінус, якщо вони відповідають уявному джерелу, уявному зображенню, уявному фокусу.

Існує формальний метод побудови зображень у тонких лінзах, в якому не розглядають хід променів світла всередині лінзи.

Якщо тонка лінза має дійсні фокуси, то її називають збиральною лінзою і позначають наступним чином:

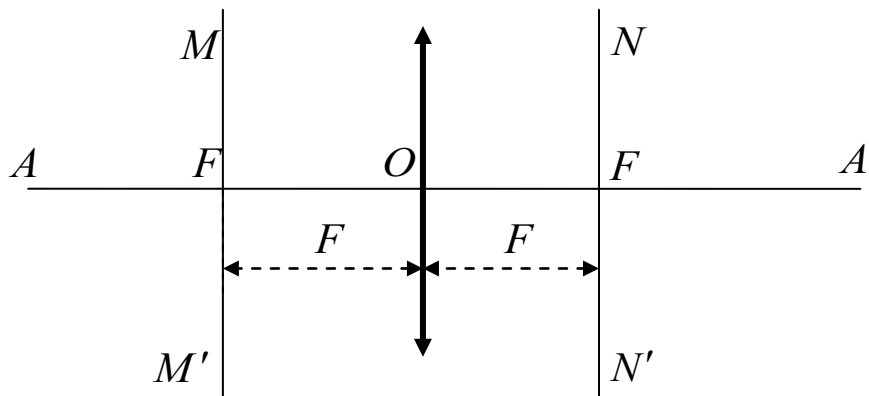


Рис. 45.

На рисунку 45 показано позначення збиральної лінзи у вигляді відрізка зі стрілками назовні, оптичний центр лінзи  $O$ , головна оптична вісь - пряма  $AA'$ , фокуси  $F$  і фокусні відстані для лінзи  $F$  (фокуси і фокусні відстані прийнято позначати однією літерою), фокальні площини  $MM'$  і  $NN'$  - це площини, перпендикулярні до головної оптичної осі, які проходять через фокуси лінзи.

Якщо тонка лінза має уявні фокуси, то її називають розсіювальною лінзою і позначають наступним чином:

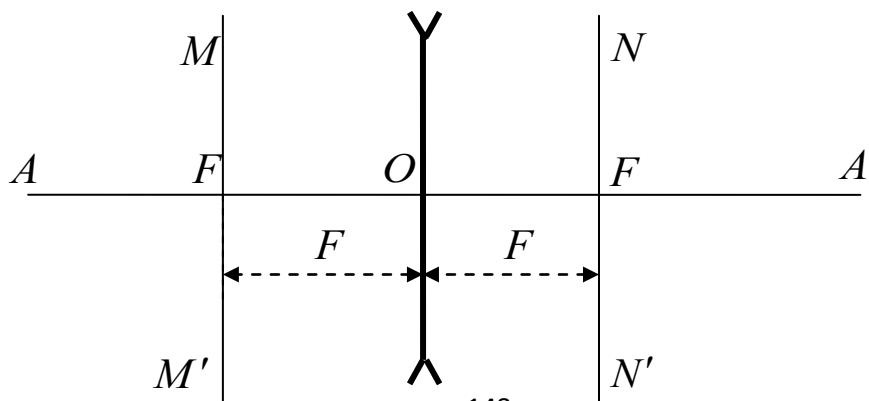


Рис. 46.

На рисунку 46 показано позначення розсіювальної лінзи у вигляді відрізка зі стрілками всередину, оптичний центр лінзи  $O$ , головна оптична вісь - пряма  $AA'$ , фокуси  $F$  і фокусні відстані для лінзи  $F$ , фокальні площини  $MM'$  і  $NN'$ .

Побудову зображень здійснюють за допомогою характерних променів світла:

1) Довільний промінь, який проходить через оптичний центр лінзи, не змінює свого напрямку.

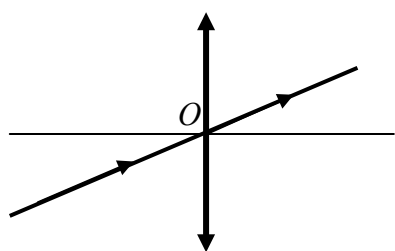


Рис.47а.

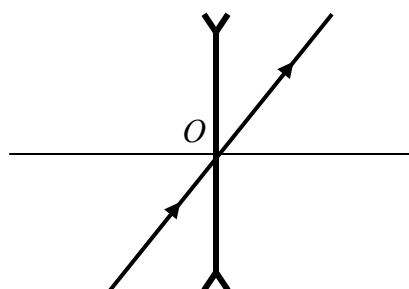


Рис.47б.

2) Довільний промінь, паралельний до головної оптичної осі, після збиральної лінзи проходить через її фокус, після розсіювальної лінзи подовження променя проходить через уявний фокус лінзи.

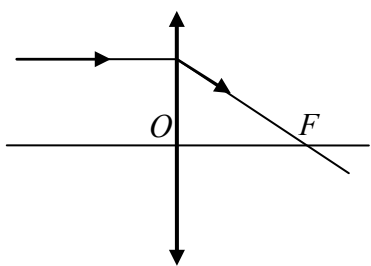


Рис.48а.

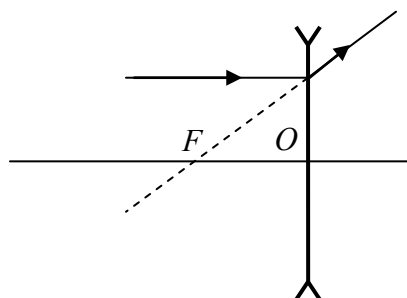


Рис.48б.

3) Паралельні промені після збиральної лінзи перетинаються у точці, що належить фокальній площині, після розсіювальної лінзи подовження променів перетинаються у точці, що належить фокальній площині.

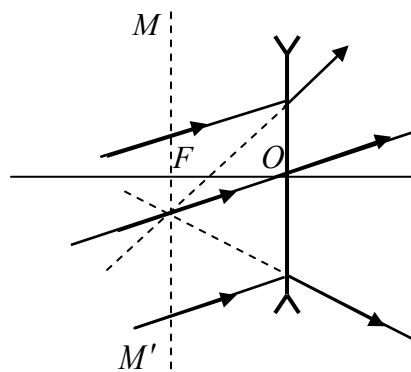
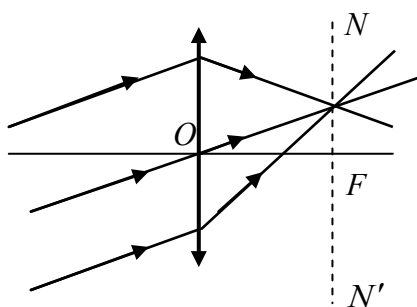


Рис.49а.

Рис.49б.

На рисунку 50 показана побудова зображення предмету у збиральній лінзі, для випадку коли відстань  $d$  більше за фокусну відстань  $F$  але менша за подвійну фокусну відстань, тобто:  $2F > d > F$ .

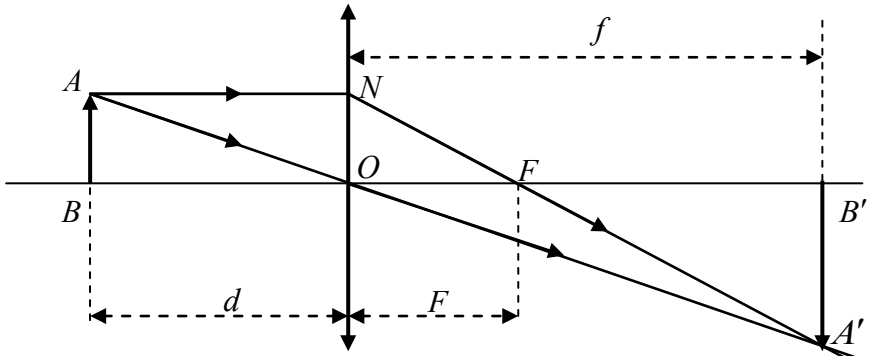


Рис.50.

Висота предмету на рисунку 50 позначена через  $AB$ , висота зображення позначена через  $A'B'$ .

**Збільшення лінзи** – відношення висоти зображення до висоти предмету. Позначати збільшення лінзи будемо через  $\Gamma$ , за визначенням воно рівне:

$$\Gamma = \frac{A'B'}{AB} \quad (2.94)$$

Побудова зображення предмету показала, що збиральна лінза, при умові  $2F > d > F$ , дає дійсне, збільшене і обернене зображення.

Аналогічною побудовою можна показати, що збиральна лінза, при умові  $d > 2F$ , дає дійсне, зменшене і обернене зображення.

Як видно з рисунку 50, при побудові зображення предмету утворились дві пари подібних, прямокутних трикутників (у кожній парі трикутників однакові гострі кути): трикутник  $ABO$  подібний до трикутника  $OA'B'$ ; трикутник  $OFN$  подібний до трикутника  $FA'B'$ .

Використовуючи подібність трикутників одержуємо (враховуючи, що  $ON = AB$ ):

$$\begin{cases} \frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{d} \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{f-F}{F} \end{cases} \Rightarrow \frac{f}{d} = \frac{f-F}{F} \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \quad (2.95)$$

Отриманий вираз (2.95) те ж називають формулою тонкої лінзи (разом з правилом знаків).

Окрім цього, з записаної системи рівнянь випливає, що збільшення лінзи дорівнює:

$$\Gamma = \frac{f}{d} \quad . \quad (2.96)$$

На рисунку 51 показана побудова зображення предмету у збиральній лінзі для випадку, коли  $d$  менша за фокусну відстань, тобто:  $d < F$ .

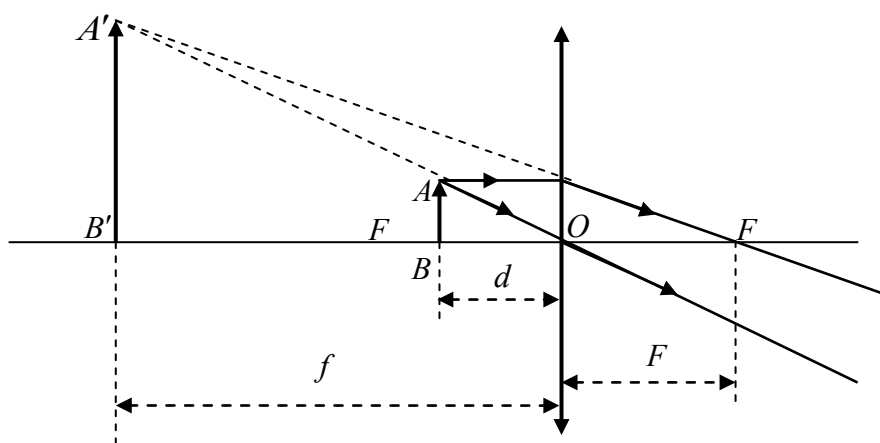


Рис. 51.

Побудова зображення предмету показала, що збиральна лінза, при умові:  $d < F$ , дає уявне, збільшене і пряме зображення.

Побудоване уявне зображення предмету у збиральній лінзі ілюструє роботу одного з найпростіших оптичних приладів – лупи. За допомогою формули (2.96), яка визначає збільшення лінзи, можна оцінити величину максимального збільшення, яке дає лупа.

Для отримання максимального збільшення необхідно, щоб предмет знаходився біля фокусу лінзи, тобто:  $d \approx F$ , а око людини повинно знаходитись на відстані найкращого зору від лінзи  $L = 0,25 \text{ м}$ , тобто  $f \approx L$ . Тоді, згідно формулі (2.96) маємо:

$$\Gamma \approx \frac{L}{F} \quad . \quad (2.97)$$

На рисунку 52 показаний приклад побудови зображення предмету у розсіювальній лінзі.



З рисунку 52 видно, зображення виявилось уявним, прямим і зменшеним.

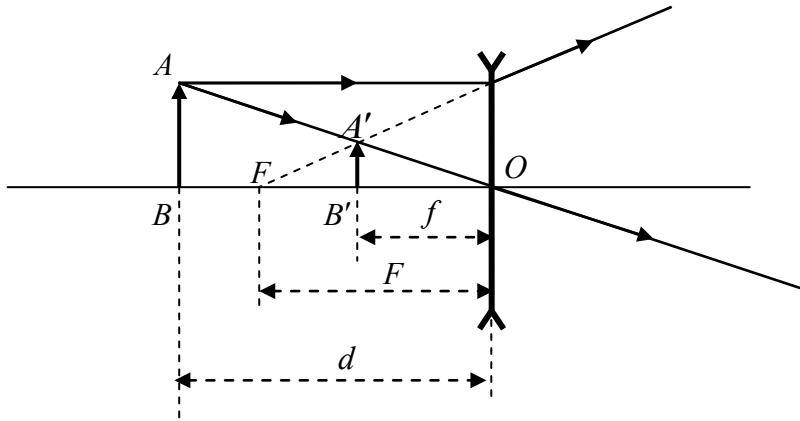


Рис. 52.

Здійснюючи аналогічні побудови, при різних відстанях між предметом і лінзою, можна показати, що зображення предмету у розсіювальній лінзі завжди уявне, зменшене і пряме.

Поверхня сферичного дзеркала анабераційна в параксіальних променях. Формулу сферичного дзеркала, яка пов'язує координати джерела світла і координати зображення у сферичному дзеркалі, можна отримати з виразів (2.42); (2.77), виконуючи заміну:  $n_2 = -n_1$ .

Якщо сферичне дзеркало опукле, то з виразу (2.42) знаходимо:

$$\frac{(-n_1)}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{-n_1 - n_1}{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x} = \frac{2}{R} \quad (2.98)$$

Якщо сферичне дзеркало увігнуте, то з виразу (2.77) знаходимо:

$$\frac{(-n_1)}{x'} - \frac{n_1}{x} = -\frac{(-n_1 - n_1)}{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x} = -\frac{2}{R} \quad (2.99)$$

Опукле сферичне дзеркало має уявний фокус, увігнуте сферичне дзеркало має дійсний фокус. Фокусна відстань для сферичного дзеркала, як випливає з рівнянь (2.98), (2.99) дорівнює половині радіусу кривизни:

$$F = \frac{R}{2} . \quad (2.100)$$

## 2.6. Основні поняття фотометрії.

**Променевий потік** – це енергія, яку переносить світло в одиницю часу:

$$\Phi = \frac{dW}{dt} . \quad (2.101)$$

Променевий потік будемо позначати через  $\Phi$ , в системі СІ одиницею виміру світлового потоку є:  $[\Phi] = \text{Вт}$ .

**Інтенсивність променевого потоку** – це променевий потік в одиниці тілесного кута, який припадає на одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку поширення світла:

$$J = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dS_n} . \quad (2.102)$$

Інтенсивність променевого потоку будемо позначати через  $J$ , в системі СІ одиницею виміру променевого потоку є:  $[J] = \frac{\text{Вт}}{\text{ср} \cdot \text{м}^2}$ .

Якщо позначити через  $\vartheta$  - кут між нормаллю до поверхні  $dS$  і напрямом поширення світла, то:  $dS_n = dS \cos \vartheta$ . Тоді, інтенсивність променевого потоку можна записати у вигляді:

$$J = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dS \cos \vartheta} . \quad (2.103)$$

**Об'ємна густина променевої енергії** – енергія світла, яка припадає на одиницю об'єму простору:

$$u = \frac{dW}{dV} . \quad (2.104)$$

Об'ємну густину променевої енергії будемо позначати через  $u$ , в системі СІ одиницею виміру об'ємної густини променевої енергії є:  $[u] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$ .

Густина променевого потоку світла, яку позначатимемо через  $\dot{j}$ , за визначенням дорівнює (див ч.1, вираз 4.2.72):

$$j = \frac{d\Phi}{dS_n} . \quad (2.105)$$

Тоді, густина променевого потоку, що припадає на одиницю тілесного кута, буде такою:

$$\frac{dj}{d\Omega} = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dS_n} \quad (2.106)$$

З виразів (2.102) і (2.106) випливає, що інтенсивність променевого потоку пов'язана з густиною променевого потоку наступним чином:

$$J = \frac{dj}{d\Omega} \quad (2.107)$$

Густина променевого потоку пов'язана з об'ємною густиною променевої енергії співвідношенням (див ч.1, вираз 4.2.75):

$$j = uv \quad (2.108)$$

Підставляючи рівність (2.108) у вираз (2.107) знаходимо:

$$\begin{aligned} J &= v \frac{du}{d\Omega} \\ &\Downarrow \\ du &= \frac{1}{v} J d\Omega \\ &\Downarrow \\ u &= \frac{1}{v} \int J d\Omega \quad (2.109) \end{aligned}$$

Для частинного випадку, коли інтенсивність променевого потоку однакова по всіх напрямках:  $J = const$ , маємо:

$$u = \frac{4\pi}{v} J \quad (2.110)$$

Розглянуті величини: променевий потік, інтенсивність променевого потоку, об'ємна густина променевої енергії це енергетичні характеристики світла.

Окрім енергетичних характеристик світла у фотометрії є інші характеристики світлового випромінювання, які визначаються по сприйняттю світла людським оком – фотометричні характеристики світла.

Оскільки у різних людей сприйняття світла різне, то фотометричні величини спираються на усереднені характеристики ока людини.

**Світловий потік** – це енергія світла, яку в одиницю часу сприймає око людини.

Світловий потік, як і променевий потік світла, будемо позначати те ж через  $\Phi$ , але світловий потік має іншу одиницю виміру, в системі СІ одиницею виміру світлового потоку є люмен:  $[\Phi] = \text{лм}$ .

Світловий потік, фактично, це потужність світла, яку сприймає око людини. Тому, між одиницею виміру люмен і одиницею виміру потужності Вт існує зв'язок, який залежить від довжини хвилі світла.

Людське око найбільш чутливе до довжини хвилі світла  $\lambda = 555 \text{ нм}$ , для такого значення довжини хвилі зв'язок такий:

$1 \text{ Вт} \approx 0,0016 \text{ лм}$  - механічний еквівалент світла;

$1 \text{ лм} \approx 625 \text{ Вт}$  – світлова ефективність променевого потоку.

**Сила світла джерела** – це світловий потік, який випромінює джерело в одиницю тілесного кута:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad (2.111)$$

Силу джерела світла будемо позначати через  $I$ , в системі СІ одиницею виміру сили світла є кандела:  $[I] = \text{кд}$ .

Одиниця виміру сили світла кандела є основною в системі СІ.

**Одна кандела** – це сила світла, що випромінюється світловим еталонним джерелом, перпендикулярно до його поверхні, з площі  $\frac{1}{60} \text{ см}^2$ . Світлове еталонне джерело це абсолютно чорне тіло, при температурі застигання чистої платини 2046,6 К і тиску 101325 Па.

Одиниця виміру світлового потоку визначається через одиницю виміру сили світла: один люмен це світловий потік від джерела, силою одна кандела, що припадає на тілесний кут один стерadian.

Повний світловий потік від джерела світла, як впливає з визначення сили світла (2.111), можна знайти шляхом інтегрування сили світла джерела по тілесному куту:

$$\Phi = \int I d\Omega \quad (2.112)$$

**Інтенсивність світлового потоку** – це світловий потік в одиниці тілесного кута, який припадає на одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку поширення світла.

Інтенсивність світлового потоку теж будемо позначати через  $J$ , в системі СІ одиницею виміру світлового потоку є:  $[J] = \frac{\text{лм}}{\text{ср} \cdot \text{м}^2}$ .

Якщо розглянути світловий потік від точкового джерела через сферичну поверхню радіусу  $r$ , в центрі якої знаходиться джерело світла, то всередині нескінченно малого тілесного кута  $d\Omega$  буде знаходитись ділянка поверхні сфери, перпендикулярна до осі тілесного кута, площа якої дорівнює  $dS_n = r^2 d\Omega$ .

Тоді, інтенсивність світлового потоку від точкового джерела за визначенням буде дорівнювати:

$$J = \frac{d\Phi}{r^2 d\Omega} \quad (2.113)$$

Оскільки  $I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$ , то інтенсивність світлового потоку можна представити у вигляді:

$$J = \frac{I}{r^2} \quad (2.114)$$

З одержаного виразу (2.114) випливає, що інтенсивність світлового потоку обернено пропорційна до квадрату відстані від джерела світла.

**Освітленість** – це відношення світлового потоку до площі поверхні, на яку падає світло:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \quad (2.115)$$

Освітленість будемо позначати через  $E$ , в системі СІ одиницею виміру освітленості є люкс:  $[E] = \text{лк}$ .

Позначимо через  $\vartheta$  - кут між нормаллю до поверхні і напрямом променів світла, що падають на поверхню. Оскільки  $dS = \frac{dS_n}{\cos \vartheta} = \frac{r^2 d\Omega}{\cos \vartheta}$  і

$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$ , то освітленість дорівнює:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{d\Phi \cos \vartheta}{d\Omega r^2} = \frac{I}{r^2} \cos \vartheta \quad ,$$

тобто: 
$$E = \frac{I}{r^2} \cos \vartheta \quad (2.116)$$

Формулу (2.116) називають законом обернених квадратів. Тобто, освітленість обернено пропорційна до квадрату відстані від джерела світла.

Якщо джерело світла має скінчені розміри (не точкове джерело), то для нього існує характеристика, яку називають поверхнева яскравість (або просто яскравість).

Позначимо через  $d\Phi$  - світловий потік від елемента поверхні джерела світла площею  $dS$ , який поширюється у тілесному куті  $d\Omega$ ; через  $\theta$  позначимо кут між віссю тілесного кута і перпендикуляром до елемента поверхні джерела світла.

Проекція елемента поверхні джерела на площину, перпендикулярну до осі тілесного кута дорівнює:  $dS_n = dS \cos \theta$ . Площу  $dS_n$  називають площею видимого розміру елемента поверхні.

**Поверхнева яскравість** – характеристика випромінювання елемента поверхні джерела світла, яка дорівнює відношенню світлового потоку в одиниці тілесного кута до площі видимого розміру елемента поверхні:

$$B = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dS \cos \theta} \quad (2.117)$$

Яскравість будемо позначати через  $B$ , в системі СІ одиницею виміру освітленості є:  $[B] = \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}$ . Існує ще одна, популярна одиниця виміру

яскравості стил'б:  $1 \text{ стил'б} = \frac{\text{кд}}{\text{см}^2} = 10^4 \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}$  (При енергетичному

розгляді випромінювання джерела замість світлового потоку розуміють променевий потік, термін яскравість змінюють на енергетичну світність,

одиницею виміру якої є  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ).

Якщо яскравість поверхні джерела світла однакова у всіх напрямках, то його називають джерелом світла, яке підпорядковується закону Ламберта.

**Світність джерела** – це повний світловий потік з одиниці площі поверхні джерела, в тілесному куті  $2\pi \text{ ср}$ :

$$K = \left. \frac{d\Phi}{dS} \right|_{\Omega = 2\pi \text{ ср}} \quad (2.118)$$

Світність будемо позначати через  $K$ , в системі СІ одиниця виміру світності:  $[K] = \frac{\text{лм}}{\text{м}^2}$ .

Формулу для світності можна знайти з визначення яскравості, якщо помножити рівність (2.117) на  $\cos \theta$  і про інтегрувати по тілесному куту в межах  $2\pi \text{ ср}$  то:

$$\int B \cos \theta d\Omega = \frac{d\Phi}{dS} \Big|_{\Omega = 2\pi \text{ ср}}$$

$$\Downarrow$$

$$K = \int B \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} B \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} B \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$\Downarrow$$

$$K = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} B \cos \theta \sin \theta d\theta \quad . \quad (2.119)$$

Для джерела світла, що випромінює за законом Ламберта ( $B = \text{const}$ ), світність джерела дорівнює:

$$K = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} B \cos \theta \sin \theta d\theta = \left. \begin{array}{l} \text{заміна} \\ \text{змінної} \\ t = \sin \theta \\ dt = \cos \theta d\theta \end{array} \right| = 2\pi B \int_0^1 t dt =$$

$$= 2\pi B \cdot \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \pi B$$

тобто:  $K = \pi B \quad . \quad (2.120)$

За відомою яскравістю джерела світла можна знайти освітленість ділянки поверхні, площу якої позначимо через  $dS_p$ . Кут між нормаллю до поверхні, на яку падає світло від елемента поверхні джерела, і віссю тілесного кута, під яким з елемента поверхні джерела  $dS$  спостерігається

поверхня  $dS_p$ , позначимо через  $\mathcal{G}$ , як показано на рисунку 53. Проекція площі  $dS_p$  на площину, перпендикулярну до осі тілесного кута дорівнює:

$$dS_{np} = dS_p \cos \mathcal{G} \quad , \quad (2.121)$$

з іншого боку, проекцію  $dS_{np}$  можна виразити через тілесний кут  $d\Omega_p$ , під яким з елемента поверхні джерела спостерігається елемент поверхні  $dS_p$ :

$$dS_{np} = r^2 d\Omega_p \quad . \quad (2.122)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (2.121) і (2.122) знаходимо:

$$r^2 d\Omega_p = dS_p \cos \mathcal{G}$$

⇓

$$d\Omega_p = \frac{dS_p}{r^2} \cos \mathcal{G} \quad . \quad (2.123)$$

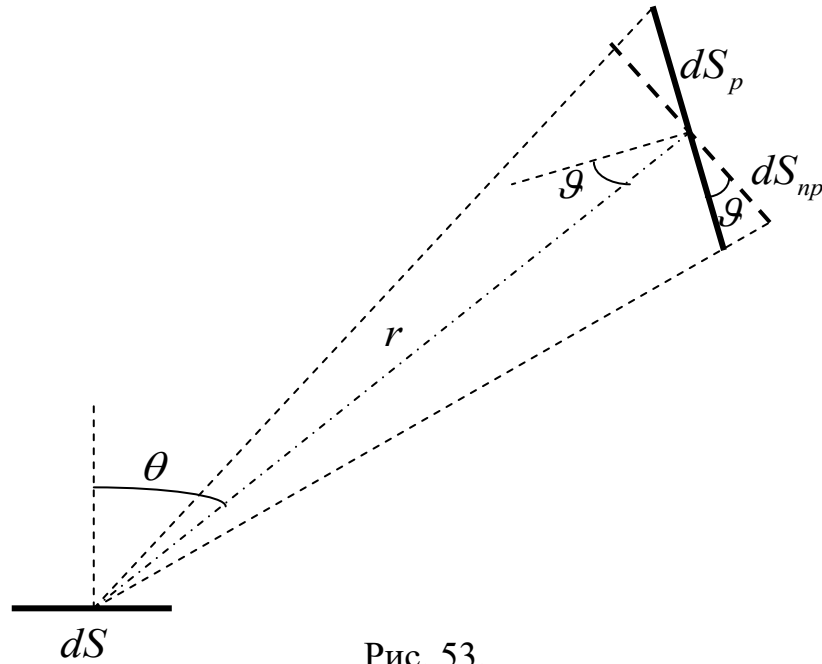


Рис. 53.

Тоді, яскравість елемента поверхні джерела у напрямі поверхні  $dS_p$ , згідно виразу (2.117), буде такою:

$$B = \frac{d^2\Phi}{d\Omega_p dS \cos \theta} = \frac{d^2\Phi}{\frac{dS_p}{r^2} \cos \mathcal{G} dS \cos \theta} \quad . \quad (2.124)$$

Помножимо рівність (2.124) на  $\frac{1}{r^2} \cos \mathcal{G} \cos \theta$  :



$$\frac{B}{r^2} \cos \vartheta \cos \theta = \frac{d^2 \Phi}{dS_p dS} \quad (2.125)$$

Інтегруючи рівність (2.125) по поверхні джерела світла і враховуючи, що освітленість за визначенням дорівнює куту  $E = \frac{d\Phi}{dS_p}$ , одержимо:

$$\int_S \frac{B}{r^2} \cos \vartheta \cos \theta dS = \frac{d\Phi}{dS_p}$$

$$\Downarrow$$

$$E = \int_S \frac{B}{r^2} \cos \vartheta \cos \theta dS \quad (2.126)$$

Отримана формула (2.126) дозволяє знаходити освітленість ділянки поверхні, створену джерелом світла з яскравістю  $B$ .

### 2.7. Коефіцієнт відбиття при нормальному падінні світла на межу розділу двох прозорих середовищ.

Позначимо напруженості електричного поля для падаючого, відбитого та заломленого світла через  $\vec{E}$ ,  $\vec{E}'$  та  $\vec{E}''$ , відповідно, напруженості магнітного поля через  $\vec{H}$ ,  $\vec{H}'$  та  $\vec{H}''$ , відповідно.

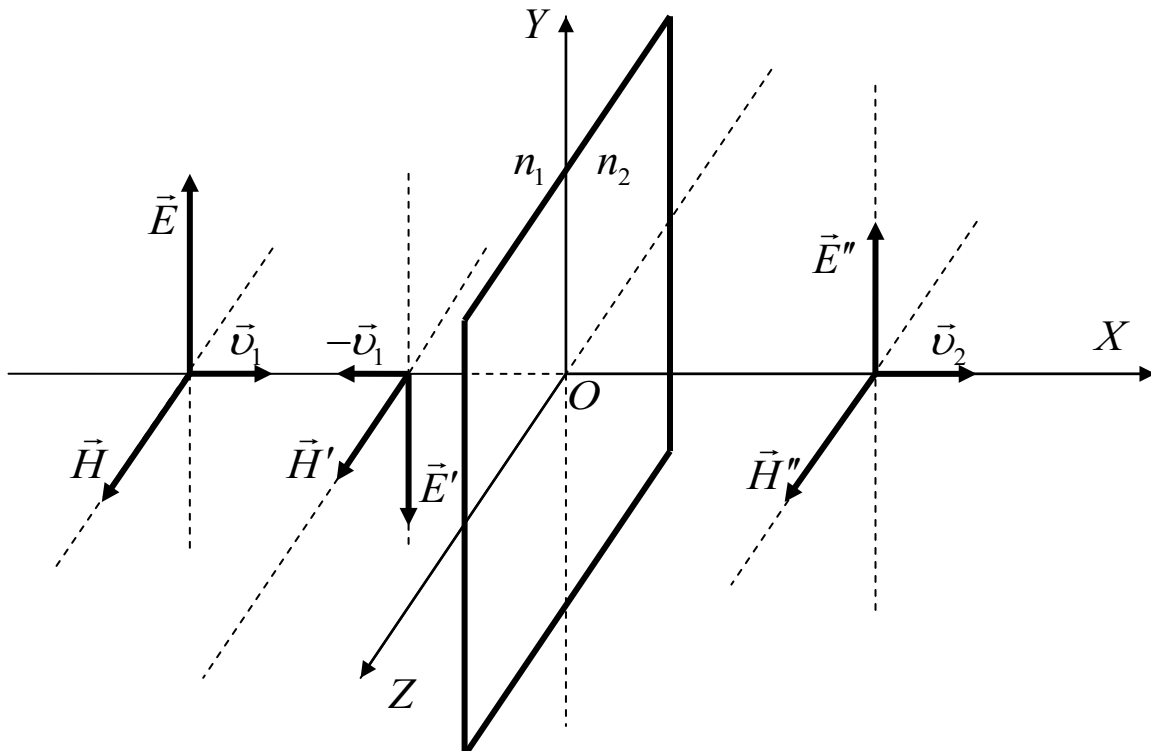


Рис. 54.

Оскільки електромагнітна хвиля поперечна, то при нормальному падінні світла вектори напруженостей електричного і магнітного поля будуть паралельними до границі розділу середовищ.

Виберемо напрям осей координат вибирають таким чином, що б напрям поширення падаючої хвилі збігався з віссю  $X$ ; поверхня розділу середовищ належала площині  $YOZ$ ; вектори напруженості електричного поля були напрямлені вздовж осі  $Y$ ; вектори напруженості магнітного поля були напрямлені вздовж осі  $Z$ , як показано на рисунку 54.

Абсолютні показники заломлення позначимо через  $n_1, n_2$ .

Згідно виразу (1.153) і рівності (1.194, ч. 3), складові напруженостей електричного і магнітного поля на границі розділу середовищ не змінюються:  $E_{1\tau} = E_{2\tau}; H_{1\tau} = H_{2\tau}$ .

Звідси випливає, що сума проєкцій напруженостей електричного поля падаючої і відбитої хвилі повинна дорівнювати проєкції напруженості електричного поля заломленої хвилі і сума проєкцій напруженостей магнітного поля падаючої і відбитої хвилі повинна дорівнювати проєкції напруженості магнітного поля заломленої хвилі:

$$E_y + E'_y = E''_y \quad . \quad (2.127)$$

$$H_z + H'_z = H''_z \quad . \quad (2.128)$$

Відбита світлова хвиля змінює напрям руху на протилежний. Тоді, з рівностей (1.307) випливає, що напрям одного з двох векторів напруженості електричного або магнітного поля при відбитті теж повинен змінитись на протилежний.

Використовуючи формули (1.307) можна знайти зв'язок між проєкціями напруженостей магнітного і електричного поля в електромагнітній хвилі:

$$\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 [\vec{v}; \vec{E}] = \varepsilon\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \varepsilon\varepsilon_0 v_x E_y$$

$$\Downarrow$$

$$H_z = \varepsilon\varepsilon_0 v_x E_y \quad . \quad (2.129)$$

Згідно формулі (1.279) проекція швидкості руху для падаючої хвилі:

$$v_x = v_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \mu_1 \mu_0}} ; \text{ для відбитої хвилі: } v'_x = -v_1 = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \mu_1 \mu_0}} ;$$

для заломленої хвилі:  $v''_x = v_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_0 \mu_2 \mu_0}} .$

Тоді, зв'язок напруженості магнітного і електричного поля у падаючій, відбитій та заломленій хвилі буде таким:

$$H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} E_y ; H'_z = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} E'_y ; H''_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} E''_y ; \quad (2.130)$$

$$E_y = \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_0}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}} H_z ; E'_y = -\sqrt{\frac{\mu_1 \mu_0}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}} H'_z ; E''_y = \sqrt{\frac{\mu_2 \mu_0}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}} H''_z . \quad (2.131)$$

Для прозорих діелектриків магнітна проникливість близька до одиниці, можна вважати, що:

$$\mu_1 \approx 1 ; \mu_2 \approx 1 . \quad (2.132)$$

Тоді, показники заломлення середовищ, за формулою (1.282), наближено дорівнюють:

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \approx \sqrt{\varepsilon_1} ; n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \approx \sqrt{\varepsilon_2} . \quad (2.133)$$

Використовуючи наближені рівності (2.132), (2.133) зв'язок напруженості магнітного і електричного поля у падаючій, відбитій та заломленій хвилі можна представити у вигляді:

$$H_z = n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_y ; H'_z = -n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E'_y ; H''_z = n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E''_y ; \quad (2.134)$$

$$E_y = \frac{1}{n_1} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_z ; E'_y = -\frac{1}{n_1} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H'_z ; E''_y = \frac{1}{n_2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H''_z . \quad (2.135)$$

Підставляючи вирази (2.134) у рівність (2.128) маємо:

$$n_1 E_y - n_1 E'_y = n_2 E''_y , \quad (2.136)$$

підставляючи вирази (2.135) у рівність (2.127) маємо:

$$\frac{1}{n_1} H_z - \frac{1}{n_1} H'_z = \frac{1}{n_2} H''_z \quad . \quad (2.137)$$

Розв'язуючи систему рівнянь, складену з рівнянь (2.127); (2.136) та систему рівнянь, складену з рівнянь (2.128); (2.137) одержимо проєкції напруженості електричного і магнітного поля у відбитій та заломленій хвилі:

$$\begin{cases} E_y + E'_y = E''_y \\ n_1 E_y - n_1 E'_y = n_2 E''_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E'_y = \frac{(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2} E_y \\ E''_y = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_y \end{cases} ; \quad (2.138)$$

$$\begin{cases} H_z + H'_z = H''_z \\ \frac{1}{n_1} H_z - \frac{1}{n_1} H'_z = \frac{1}{n_2} H''_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H'_z = \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 + n_2} H_z \\ H''_z = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} H_z \end{cases} . \quad (2.139)$$

З одержаних рівностей (2.138) ; (2.139) випливає:

- 1) У заломленої хвилі проєкції напруженостей поля фаза коливань напруженостей полів не змінюється і збігається з фазою коливань падаючої хвилі.

Тоді, згідно виразу (1.312), проєкції напруженостей полів падаючої і заломленої хвилі, поблизу границі розділу середовищ (при  $x \approx 0$ ), дорівнюють:  $E_y = E_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ ,  $H_z = H_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ ;  $E''_y = E''_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ ,  $H''_z = H''_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ .

Підставляючи проєкції у вирази (2.138), (2.139) і скорочуючи косинус одержимо зв'язок між амплітудами напруженостей полів заломленої і падаючої хвилі:

$$E''_m = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_m \quad , \quad (2.140)$$

$$H''_m = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} H_m \quad . \quad (2.141)$$

- 2) У відбитої хвилі фаза коливань напруженостей полів залежить від співвідношення між показниками заломлення середовищ.

а) Якщо  $n_2 > n_1$ , то фаза коливань напруженості магнітного поля у відбитій хвилі не змінюється і збігається з фазою коливань напруженості магнітного поля падаючої хвилі. Проекція напруженості електричного поля у відбитій хвилі буде мати протилежний знак до проекції напруженості електричного поля падаючої хвилі, це означає, що вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{E}'$  напрямлені протилежно – такий випадок зображений на рисунку 54.

Тоді, згідно виразу (1.312) і тригонометричній формулі зведення:  $\cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$ , проекції напруженостей полів відбитої хвилі, поблизу границі розділу середовищ, дорівнюють:

$$E'_y = E'_m \cos(\omega t + \varphi_0 - \pi), H'_z = H'_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

б) Якщо  $n_2 < n_1$ , то фаза коливань напруженості електричного поля у відбитій хвилі не змінюється і збігається з фазою коливань напруженості електричного поля падаючої хвилі. Проекція напруженості магнітного поля у відбитій хвилі буде мати протилежний знак до проекції напруженості магнітного поля падаючої хвилі, це означає, що вектори  $\vec{H}$  і  $\vec{H}'$  напрямлені протилежно.

Тоді, згідно виразу (1.312) і тригонометричній формулі зведення:  $\cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$ , проекції напруженостей полів відбитої хвилі, поблизу границі розділу середовищ, дорівнюють:

$$E'_y = E'_m \cos(\omega t + \varphi_0), H'_z = H'_m \cos(\omega t + \varphi_0 - \pi).$$

Підставляючи проекції у вирази (2.138), (2.139) і скорочуючи косинус одержимо зв'язок між амплітудами напруженостей полів відбитої і падаючої хвилі:

$$E'_m = \frac{|n_1 - n_2|}{n_1 + n_2} E_m, \quad (2.142)$$

$$H''_m = \frac{|n_2 - n_1|}{n_1 + n_2} H_m. \quad (2.143)$$

Фізичні властивості електромагнітної хвилі головним чином визначаються напрямом коливань напруженості електричного поля, тому:

1) Світло змінює фазу коливань на протилежну, при відбитті від границі середовища з більшим показником заломлення ( $n_2 > n_1$ ).

2) Фаза коливань світла не змінюється, при відбитті від границі середовища з меншим показником заломлення ( $n_2 < n_1$ ).

Інтенсивності падаючої, відбитої та заломленої хвилі, які позначимо через  $J$ ,  $J'$  та  $J''$ , прямо пропорційні до квадрату амплітуди коливань напруженості електричного поля і, згідно формулі (1.315) та наближеним рівностям (2.132); (2.133), дорівнюють :

$$J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} E_m^2 \approx \frac{1}{2} n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 . \quad (2.144)$$

$$J' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (E'_m)^2 \approx \frac{1}{2} n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (E'_m)^2 . \quad (2.145)$$

$$J'' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} (E''_m)^2 \approx \frac{1}{2} n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (E''_m)^2 . \quad (2.146)$$

Коефіцієнт відбиття  $\rho$  буде дорівнювати відношенню інтенсивності відбитої і падаючої хвилі:

$$\rho = \frac{J'}{J} = \frac{(E'_m)^2}{E_m^2} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 . \quad (2.147)$$

Коефіцієнт проходження  $p$  буде дорівнювати відношенню інтенсивності заломленої і падаючої хвилі:

$$p = \frac{J''}{J} = \frac{n_2 (E''_m)^2}{n_1 E_m^2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} . \quad (2.148)$$

Сума коефіцієнтів відбиття і проходження дорівнює одиниці:  $\rho + p = 1$ , як і повинно бути за законом збереження енергії, у відсутності поглинання світла.

## 2.8. Когерентні хвилі. Інтерференція світла.

**Когерентні хвилі** – це хвилі, для яких різниця фаз коливань у довільній точці простору не змінюється з часом, при накладанні яких у просторі виникає постійний у часі розподіл амплітуд коливань.

Наприклад, хвилі однакової частоти (монохроматичні хвилі), від двох точкових джерел хвиль, когерентні.

Нехай дві монохроматичні хвилі одночасно надходять до точки простору. Результатом накладання двох монохроматичних хвиль у даній

точці простору є хвиля тієї ж самої частоти, амплітуда якої залежить від різниці фаз коливань між хвилями.

Позначимо амплітуду коливань напруженості у першій хвилі через  $A_1$ , у другій хвилі через  $A_2$ , різницю фаз коливань між хвилями через  $\Delta\varphi$ . Тоді, амплітуда сумарної хвилі, яку позначимо через  $A$ , дорівнює:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi} \quad . \quad (2.149)$$

Формула (2.149) була отримана у першій частині посібника (див. ч.1, розділ «Коливання і хвилі»).

Інтенсивність хвилі прямо пропорційна до квадрату амплітуди коливань (див. вираз 1.315).

Підводячи рівність (2.149) до квадрату і помножуючи на відповідну постійну величину одержимо інтенсивність результуючої хвилі:

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1J_2} \cos \Delta\varphi \quad . \quad (2.150)$$

З виразу (1.150) видно, що при накладанні когерентних хвиль інтенсивність сумарної хвилі може бути більшою або меншою за суму інтенсивностей хвиль, які накладаються.

Оскільки різниця фаз коливань  $\Delta\varphi$  не залежить від часу, то **при накладанні когерентних хвиль у просторі виникає постійний у часі розподіл амплітуд коливань і інтенсивностей – це явище називають інтерференцією.** Інтерференція спостерігається для хвиль будь якої природи, у тому числі і для світлових хвиль.

При накладанні некогерентних хвиль середнє по часу значення косинуса від різниці фаз дорівнює нулю:  $\langle \cos \Delta\varphi \rangle = 0$ , оскільки різниця фаз для некогерентних хвиль є випадковою величиною і інтенсивність сумарної хвилі буде дорівнювати сумі інтенсивностей хвиль:  $J = J_1 + J_2$ , це й випадок відноситься до геометричної оптики.

Розглянемо два важливі частинні випадки для амплітуди сумарної хвилі.

1) Різниця фаз коливань між хвилями кратна до  $2\pi$  рад :

$$\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, \text{ тобто: } \Delta\varphi = 2\pi m, \text{ де } m \in \mathbb{Z} \quad . \quad (2.151)$$

Амплітуда сумарної хвилі дорівнюватиме:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(2\pi m)} = A_1 + A_2 \quad . \quad (2.152)$$

Таким чином, для різниці фаз (2.151) амплітуда сумарної хвилі максимальна і дорівнює сумі амплітуд хвиль, що накладаються.

2) Різниця фаз коливань між хвилями кратна до  $\pi$  рад :

$$\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, \text{ тобто: } \Delta\varphi = (2m+1)\pi, \text{ де } m \in Z. \quad (2.153)$$

Амплітуда сумарної хвилі дорівнюватиме:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos((2m+1)\pi)} = |A_1 - A_2| \quad (2.154)$$

Таким чином, для різниці фаз (2.153) амплітуда сумарної хвилі мінімальна і дорівнює різниці амплітуд хвиль, що накладаються за модулем.

Фаза коливань хвилі у точці простору має вигляд:

$$\varphi = \omega t - kr + \varphi_0, \quad (2.155)$$

де  $\omega$  - циклічна частота коливань,  $r$  - відстань від джерела хвиль до точки простору,  $\varphi_0$  - початкова фаза,  $k$  - хвильове число.

Якщо у вибрану точку простору надходять дві когерентні хвилі від двох джерел, то відстані від джерел до точки можуть бути різними.

Позначимо відстань від одного джерела хвиль до точки через  $r_1$ , відстань від другого джерела хвиль до точки через  $r_2$ .

Фазу коливань однієї хвилі у вибраній точці простору позначимо через  $\varphi_1$ , фазу коливань другої хвилі через  $\varphi_2$ , вони дорівнюють:

$$\varphi_1 = \omega t - kr_1 + \varphi_0, \quad \varphi_2 = \omega t - kr_2 + \varphi_0.$$

Тоді різниця фаз коливань хвиль у точці простору буде такою:

$$\Delta\varphi = k\Delta r, \quad (2.156)$$

де  $\Delta r = r_2 - r_1$ . Різницю відстаней  $\Delta r$  називають **геометричною різницею ходу двох хвиль.**

Хвильове число за визначенням дорівнює:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{серед}}},$$

де  $\lambda_{\text{серед}}$  - довжина хвилі світла у середовищі, яка дорівнює відношенню довжини хвилі світла у вакуумі  $\lambda$  і абсолютного показника заломлення  $n$ , тобто:



$$\lambda_{\text{серед}} = \frac{\lambda}{n} .$$

Тому, хвильове число можна записати у вигляді:

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda} . \quad (2.157)$$

Підставляючи хвильове число у вигляді (2.157) у вираз (2.156) маємо:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n \Delta r}{\lambda} . \quad (2.158)$$

Введемо поняття оптична різниця ходу.

**Оптична різниця ходу** – добуток абсолютного показника заломлення і геометричної різниці ходу.

Позначати оптичну різницю ходу будемо через  $\Delta$ , за визначенням оптична різниця ходу дорівнює:

$$\Delta = n \Delta r . \quad (2.159)$$

Якщо використати поняття оптична різниця ходу, то різницю фаз коливань для двох хвиль (2.158) можна представити у вигляді:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} . \quad (2.160)$$

Різниця фаз, при якій амплітуда коливань сумарної хвилі максимальна, дорівнює:  $\Delta\varphi = 2\pi m$ .

Підставляючи різницю фаз  $\Delta\varphi = 2\pi m$  у вираз (2.160) одержимо:

$$\cancel{2\pi} m = \frac{\cancel{2\pi} \Delta}{\lambda} \Rightarrow \Delta = m \lambda . \quad (2.161)$$

Одержаний вираз (2.161) показує, що якщо оптична різниця ходу двох когерентних хвиль дорівнює цілому числу довжин хвиль, то у даній точці простору спостерігається максимальна амплітуда коливань сумарної хвилі.

Рівність (2.161) називають **умовою спостереження максимуму інтенсивності світла, при накладанні когерентних хвиль.**

Різниця фаз, при якій амплітуда коливань сумарної хвилі мінімальна, дорівнює:  $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$ .

Підставляючи різницю фаз  $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$  у вираз (2.160) одержимо:

$$(2m+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{2\lambda\Delta}{\lambda} \Rightarrow \Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (2.162)$$

Одержаний вираз (2.162) показує, що якщо оптична різниця ходу двох когерентних хвиль дорівнює напівцілому числу довжин хвиль, то у даній точці простору спостерігається мінімальна амплітуда коливань сумарної хвилі.

Рівність (2.162) називають **умовою спостереження мінімуму інтенсивності світла, при накладанні когерентних хвиль.**

Світло від звичайних джерел (не лазерних) не буває монохроматичним.

Атоми джерела випромінюють світло окремими порціями, які називають цугами. Середній час, за який атом джерела випромінює цуг світла становить  $\tau \approx 10^{-8} \text{ с}$  (оціночне значення довжини цугу для звичайного джерела світла, яке позначимо через  $l_{\text{цуг}}$ , буде таким:  $l_{\text{цуг}} \approx c\tau \approx 3 \text{ м}$ ). При послідовних випромінюваннях цугів різниця фаз коливань і довжина хвиль від різних джерел хаотично змінюються.

Для отримання когерентних світлових хвиль, хвильовий фронт від одного джерела світла різними засобами ділять на дві частини, які при виконанні певних умов можна вважати двома джерелами когерентних хвиль. Умови когерентності хвиль від ділянок хвильової поверхні розглянемо на прикладі інтерференції світла у досліді Юнга.

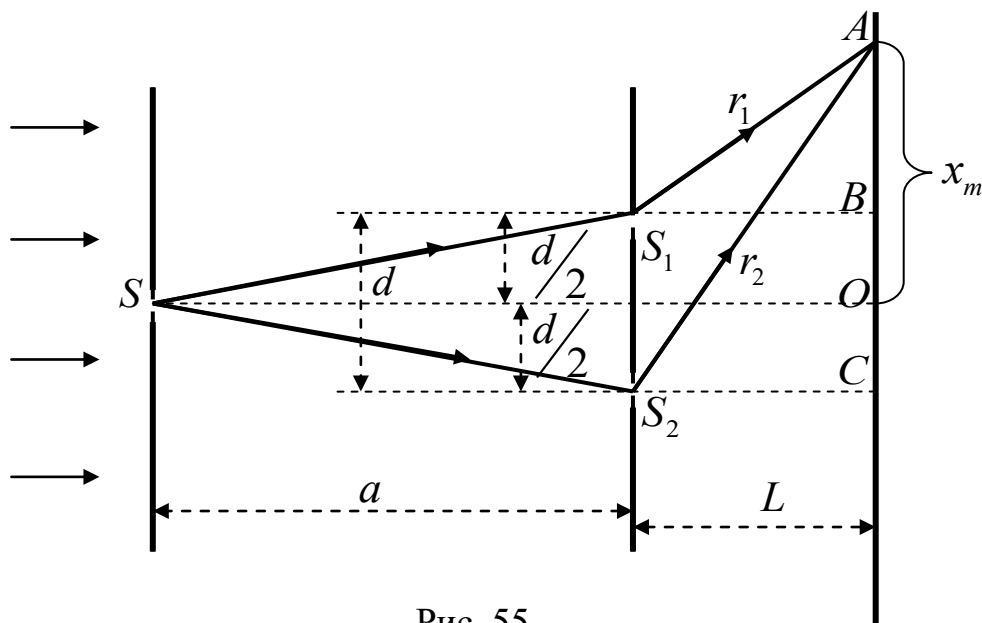


Рис. 55.

На рисунку 55 зображена експериментальна установка досліді Юнга. Світло проходить через вузьку щілину  $S$  (цю вузьку щілину у літературі часто називають діафрагмою), яку можна вважати джерелом світла малих розмірів.

Потім, світло від джерела  $S$  проходить через дві вузькі щілини  $S_1$ ;  $S_2$ , відстань між діафрагмою і двома щілинами позначена через  $a$ , як показано на рисунку 55.

Дві вузькі ділянки хвильового фронту, що пройшли через щілини, можна вважати двома джерелами когерентного світла, при виконанні певних умов. Відстань між двома джерелами позначена через  $d$ .

Результат накладання когерентних хвиль від джерел хвиль  $S_1$  і  $S_2$  спостерігається на непрозорому екрані. Відстань між джерелами  $S_1$ ;  $S_2$  і непрозорим екраном позначена через  $L$ .

В точці екрану  $A$ , яка знаходиться на відстані  $x_m$  від центру екрану, накладаються хвилі від джерел  $S_1$  і  $S_2$ . Відстані, які проходять хвилі від джерел до точки  $A$ , позначені через  $r_1$  і  $r_2$ , відповідно.

Дослід Юнга проводився у повітрі, тому оптична різниця ходу хвиль, при їх русі від джерел до точки екрану  $A$ , дорівнює їх геометричній різниці ходу:

$$\Delta = r_2 - r_1 \quad . \quad (2.163)$$

Оскільки оптична різниця ходу  $\Delta$  змінюється неперервно при зміні відстані  $x_m$  точки  $A$  до центру екрану, то інтерференційна картина буде мати вигляд світлих і темних смуг, що чергуються.

Використовуючи теорему Піфагора для прямокутних трикутників  $S_1AB$  і  $S_2AC$  маємо:

$$\begin{cases} r_2^2 = L^2 + \left(x_m + \frac{d}{2}\right)^2 \\ r_1^2 = L^2 + \left(x_m - \frac{d}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 2x_m d$$

$$\Downarrow$$

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2x_m d$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta(r_2 + r_1) = 2x_m d \quad . \quad (2.164)$$

Для малих значень  $x_m$  і  $d$ , буде виконуватись наближена рівність:

$$r_2 + r_1 \approx 2L \quad . \quad (2.165)$$

Підставляючи наближену рівність (2.165) у вираз (2.164) знаходимо оптичну різницю ходу для світла від джерел  $S_1$  і  $S_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta \cdot 2L &= 2x_m d \\ \Downarrow \\ \Delta &= \frac{x_m d}{L} \quad . \end{aligned} \quad (2.166)$$

У місцезнаходженні світлих смуг спостерігається максимум інтенсивності світла. Тому, для світлої смуги оптична різниця ходу повинна задовольняти умову (2.161), звідси випливає:

$$\begin{cases} \Delta = \frac{x_m d}{L} \\ \Delta = m\lambda \end{cases} \Rightarrow x_m = \frac{\lambda L}{d} m \quad . \quad (2.167)$$

З отриманої формули (2.167) випливає фізичний зміст цілого числа  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  для світлої смуги - це номер світлої смуги, відносно центру екрану або інша назва - порядок інтерференції. У центрі екрану спостерігається світла смуга, якій відповідає значення  $m = 0$ .

У місцезнаходженні темних смуг спостерігається мінімум інтенсивності світла. Тому, для темної смуги оптична різниця ходу повинна задовольняти умову (2.162), звідси випливає:

$$\begin{cases} \Delta = \frac{x_m d}{L} \\ \Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \end{cases} \Rightarrow x_m = \frac{\lambda L}{d} \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad . \quad (2.168)$$

З отриманої формули (2.168) випливає фізичний зміст цілого числа  $m + 1$  для темної смуги - це номер темної смуги, відносно центру екрану.

**Ширина інтерференційної смуги** – це відстань між двома сусідніми світлими смугами.

За визначенням ширина інтерференційної смуги  $\Delta x$  дорівнює:

$$\begin{cases} x_{m+1} = \frac{\lambda L}{d} (m+1) \\ x_m = \frac{\lambda L}{d} m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda L}{d} \quad . \quad (2.169)$$

З'ясуємо умови когерентності для світла у досліді Юнга.

Експеримент показав, що на екрані спостерігається обмежена кількість світлих і темних смуг. Це означає, що інтерференція світла спостерігається тільки тоді, коли оптична різниця ходу не перевищує певне граничне значення, яке називають довжиною когерентності хвиль, обумовлене не монохроматичністю хвиль (інша назва – умова часової когерентності хвиль).

Позначимо довжину когерентності хвиль через  $l_{\text{ког}}$ , через  $m_{\text{max}}$  найбільший номер світлої смуги (найбільший порядок інтерференції). Тоді, довжина когерентності, згідно виразу (2.161), дорівнює:

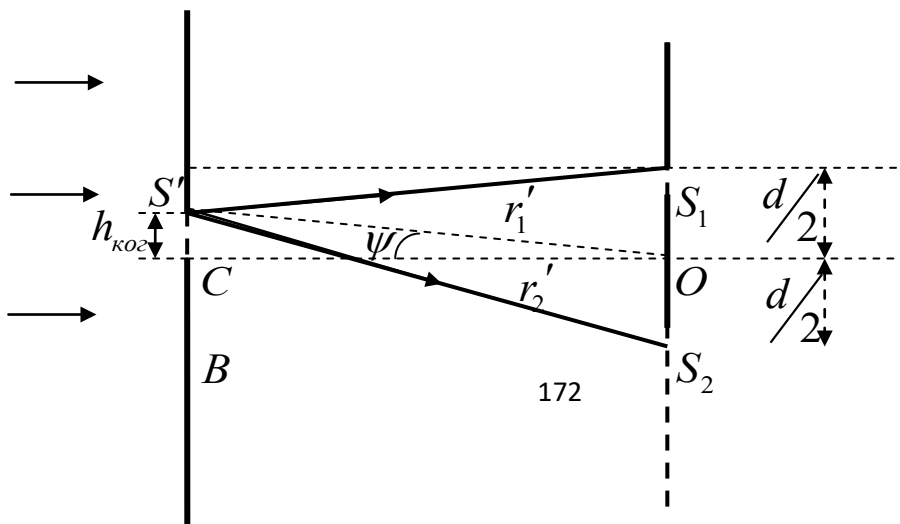
$$l_{\text{ког}} = m_{\text{max}} \lambda \quad (2.170)$$

Нехай довжина хвиль, що надходить від джерела світла, рівномірно розподілена в інтервалі  $(\lambda; \lambda + \Delta\lambda)$ . Світлі смуги, відповідні цим довжинам хвиль, будуть рівномірно заповнювати ділянки екрану між світлими смугами, відповідними довжині хвилі  $\lambda$ , і ділянка екрану між світлою смугою номер  $m_{\text{max}}$  і світлою смугою номер  $m_{\text{max}} + 1$  повністю заповнюється світлими смугами, відповідними інтервалу довжин хвиль. Внаслідок цього, світлу смугу номер  $m_{\text{max}} + 1$ , вже не можна бачити, на фоні світлих смуг, відповідних інтервалу довжин хвиль. Звідси випливає значення максимального порядку інтерференції у досліді Юнга:

$$\begin{aligned} m_{\text{max}} (\lambda + \Delta\lambda) &= (m_{\text{max}} + 1) \lambda \\ \Downarrow \\ \cancel{m_{\text{max}} \lambda} + m_{\text{max}} \Delta\lambda &= \cancel{m_{\text{max}} \lambda} + \lambda \\ \Downarrow \\ m_{\text{max}} &= \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (2.171) \end{aligned}$$

Підставляючи максимальний порядок інтерференції (2.171) у вираз (2.170) можна оцінити довжину когерентності світлових хвиль у досліді Юнга:

$$l_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (2.172)$$



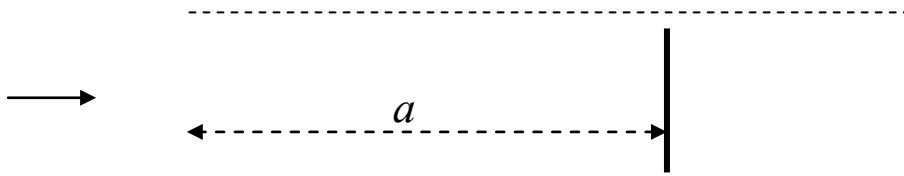


Рис. 56.

Існує ще одна умова когерентності хвиль, обумовлена розмірами джерела світла. Експеримент показав, що при збільшенні ширини щілини  $S$  інтерференційні смуги розмиваються і, при певному значенні ширини щілини, повністю зникають.

Це означає, що інтерференція світла спостерігається тільки тоді, коли розміри джерела хвиль не перевищують певне граничне значення, яке називають шириною когерентності хвиль, обумовлене розмірами джерела хвиль (інша назва – умова просторової когерентності хвиль). Ширину когерентності позначимо через  $h_{\text{ког}}$ .

Пояснюється це наступним чином: кожна точку джерела хвиль  $S'$  можна вважати точковим джерелом, промені світла від якого, потрапляючи до малих щілин  $S_1$  і  $S_2$  мають додаткову оптичну різницю ходу, яка дорівнює:  $\Delta' = r_2' - r_1'$  (якщо щілина  $S$  нескінченно вузька і знаходиться симетрично відносно щілин  $S_1$  і  $S_2$ , то додаткова різниця ходу дорівнює нулю). Цим променям світла буде відповідати інтерференційна світла смуга на екрані. Додаткова оптична різниця ходу змінюється неперервно, при переході від однієї точки джерела до іншої. Якщо для граничної точки джерела додаткова оптична різниця ходу буде дорівнювати довжині хвилі, то інтерференційні світлі смуги від різних точок джерела рівномірно заповнять ширину інтерференційної смуги і інтерференційна картина зникає. Ця рівність впливає з умови для спостереження максимуму інтенсивності:

$$\begin{aligned}
 m\lambda + \Delta' &= (m + 1)\lambda \\
 \Downarrow \\
 m\lambda + \Delta' &= m\lambda + \lambda \\
 \Downarrow \\
 \Delta' &= \lambda \quad . \quad (2.173)
 \end{aligned}$$

Записуючи теорему Піфагора для прямокутних трикутників  $S'S_2B$  і  $S'S_1A$ , показаних на рисунку 56, маємо:

$$\begin{cases}
(r_2')^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2} + h_{\text{коз}}\right)^2 \\
(r_1')^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2} - h_{\text{коз}}\right)^2
\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(r_2')^2 - (r_1')^2 = 2h_{\text{коз}}d$$

$$\Downarrow$$

$$(r_2' - r_1')(r_2' + r_1') = 2h_{\text{коз}}d$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta'(r_2' + r_1') = 2h_{\text{коз}}d \quad . \quad (2.174)$$

Для малих значень  $d$  буде виконуватись наближена рівність:

$$r_2' + r_1' \approx 2a \quad . \quad (2.175)$$

Підставляючи наближену рівність (2.175) у вираз (2.174) і враховуючи рівність (2.173) знаходимо:

$$\begin{cases}
\Delta' \cdot 2a = 2h_{\text{коз}}d \\
\Delta' = \lambda
\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{h_{\text{коз}}}{a} = \frac{\lambda}{d} \quad . \quad (2.176)$$

З прямокутного трикутника  $S'OC$ , показаного на рисунку 56, використовуючи наближену формулу для малих кутів  $\text{tg}\alpha \approx \alpha$ , одержуємо:

$$\frac{h_{\text{коз}}}{a} = \text{tg}\psi \approx \psi \quad . \quad (2.177)$$

Підставляючи наближену рівність (2.177) у вираз (2.176) маємо:

$$\psi = \frac{\lambda}{d} \quad . \quad (2.178)$$

Формула (2.178) визначає граничне значення кутового розміру джерела світла, при якому зникає інтерференційна картина.

Умова просторової когерентності хвиль у досліді Юнга виконується, якщо кутовий розмір джерела світла менший за граничне значення:

$$\psi < \frac{\lambda}{d} \quad (2.179)$$

Таким чином, для спостереження інтерференційної картини у досліді Юнга необхідно виконання двох умов: оптична різниця ходу повинна бути меншою за довжину когерентності світла і кутовий розмір джерела світла повинен бути меншим за відношення довжини хвилі світла до відстані між щілинами.

Але, при створенні інтерференційних систем, прийнято вважати світло когерентним, якщо оптична різниця ходу удвічі менша за довжину когерентності світла і кутовий розмір джерела світла удвічі менший за відношення довжини хвилі світла до відстані між щілинами:

$$\Delta \leq \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} \quad (2.180)$$

$$\psi \leq \frac{\lambda}{2d} \quad (2.181)$$

Розглянемо інші приклади інтерференційних схем. Вважаючи, що умови когерентності для світла виконуються.

### Бідзеркала Френеля.

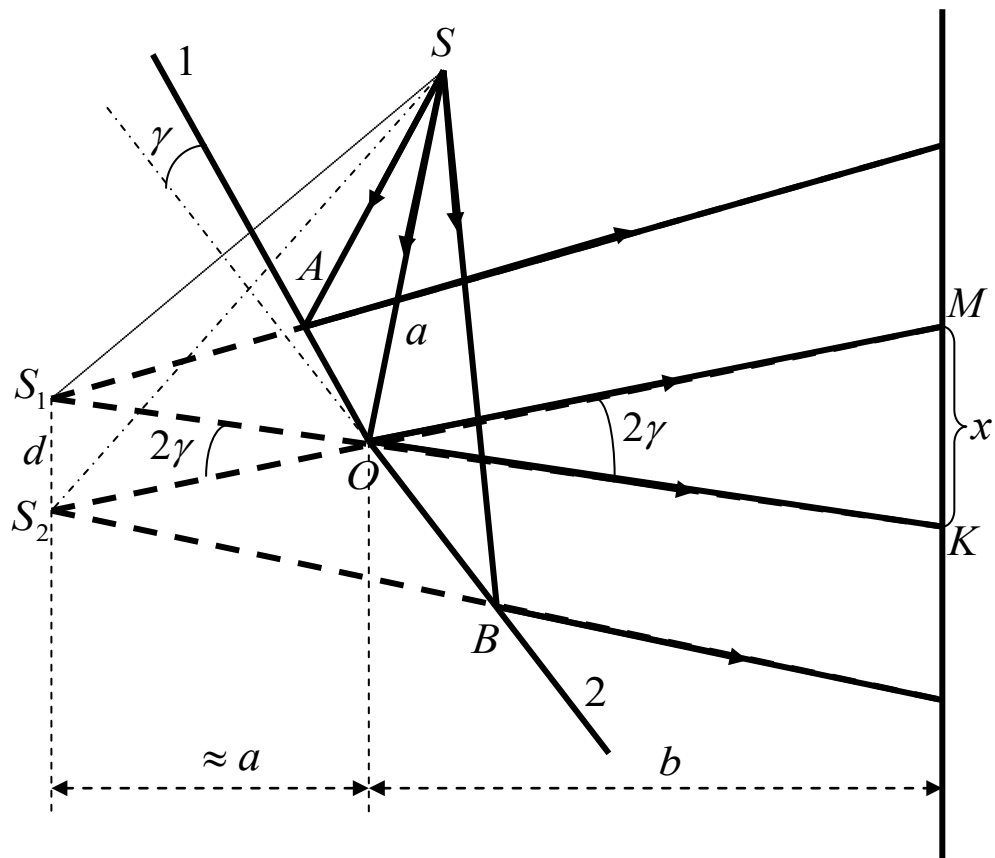


Рис. 57.



На рисунку 57 зображена інтерференційна система, яку називають бідзеркала Френеля. Це з'єднані два плоскі дзеркала, площини яких утворюють між собою малий кут  $\gamma$ .

Уявні зображення джерела світла  $S$ , позначені через  $S_1$  і  $S_2$ , відіграють роль джерел когерентних хвиль. Інтерференційна картина, у вигляді чергування світлих і темних смуг, спостерігається в області екрану  $MK$ , на якій накладаються хвилі від джерел  $S_1$  і  $S_2$ . Ширина області  $MK$  позначена через  $x$ .

Відстань між джерелом світла  $S$  і місцем з'єднання дзеркал позначена через  $a$ , відстань між лінією з'єднання дзеркал і екраном позначена через  $b$ . При малих кутах  $\gamma$  відстань між джерелами  $S_1$ ;  $S_2$  і лінією з'єднання дзеркал приблизно дорівнює  $a$ , як видно з рисунку 57.

При повороті плоского дзеркала на кут  $\gamma$  промінь світла, відбитий від дзеркала, повертається на кут  $2\gamma$  (див. розв'язок задачі 2.1). Тому, кут між граничними променями  $OM$  і  $OK$ , відбитими від дзеркала 1 і дзеркала 2, дорівнює  $2\gamma$ .

Тоді, як видно з рисунку 57, при малих кутах  $\gamma$  відстань між джерелами  $S_1$  і  $S_2$ , наближено дорівнює:

$$d \approx 2\gamma a \quad ; \quad (2.182)$$

відстань між джерелами  $S_1$ ;  $S_2$  і екраном наближено дорівнює:

$$l \approx a + b \quad ; \quad (2.183)$$

ширина області спостереження інтерференційної картини наближено дорівнює:

$$x \approx 2\gamma b \quad . \quad (2.184)$$

Підставляючи наближені рівності (2.182), (2.183) і (2.184) у вираз (2.169) одержимо ширину інтерференційної смуги:

$$\Delta x = \frac{\lambda(a+b)}{2\gamma a} = \frac{\lambda}{2\gamma} \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \quad . \quad (2.185)$$

Оскільки область спостереження інтерференційної картини обмежена, то буде обмеженою і максимально можлива кількість світлих смуг інтерференційної картини.

Позначимо через  $N$  - максимально можливу кількість світлих смуг інтерференційної картини, вона буде дорівнювати відношенню ширини області спостереження інтерференційної картини до ширини інтерференційної смуги:

$$N = \frac{x}{\Delta x} = \frac{2\gamma a \cdot 2\gamma b}{\lambda(a+b)} = \frac{4\gamma^2 ab}{\lambda(a+b)},$$

тобто:

$$N = \frac{4\gamma^2 ab}{\lambda(a+b)}. \quad (2.186)$$

Якщо на бідзеркала Френеля падає плоска монохроматична хвиля (у цьому випадку  $a \rightarrow \infty$ ), то:

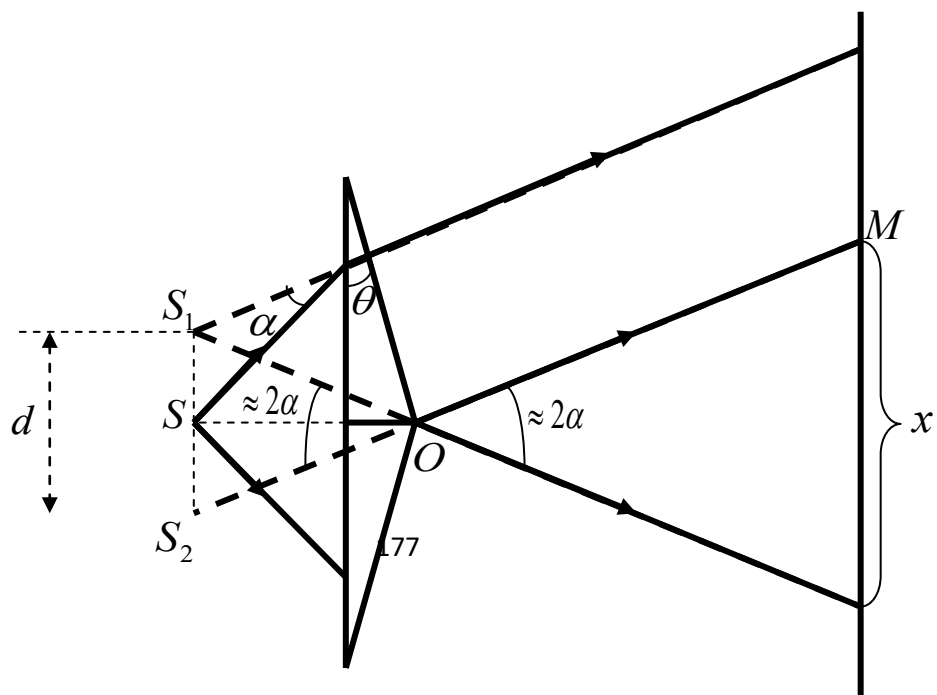
$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\gamma}; \quad N = \frac{4\gamma^2 b}{\lambda}. \quad (2.187)$$

### Біпризма Френеля.

Промені світла, проходячи через скляну призму з малим заломлюючим кутом  $\theta$ , незалежно від кута падіння, відхиляються від початкового напрямку поширення на однаковий кут  $\alpha$ , який дорівнює (див. розв'язок задачі 2.3):

$$\alpha = \theta(n-1), \quad (2.188)$$

де  $n$  - показник заломлення скла. Внаслідок цього, точкове джерело світла буде мати уявне зображення. Якщо з'єднати дві призми так, як показано на рисунку 58, то одне джерело світла  $S$  буде мати два уявні зображення  $S_1; S_2$ , які можна вважати джерелами когерентних хвиль.



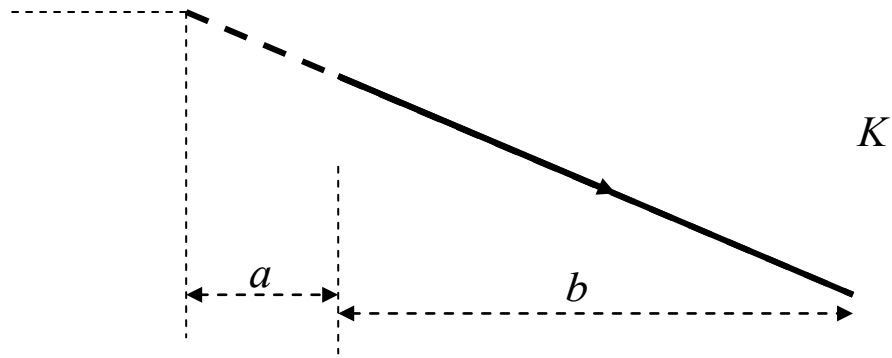


Рис. 58.

Інтерференційна картина, у вигляді чергування світлих і темних смуг, спостерігається в області екрану  $MK$ , на якій накладаються хвилі від джерел  $S_1$  і  $S_2$ . Ширина області  $MK$  позначена через  $x$ .

Для параксіальних променів світла кут  $S_1OS_2 \approx 2\alpha$ , як видно з рисунку 58. Тому, кут між граничними променями  $OM$  і  $OK$ , що проходять через біпризму, теж дорівнює  $2\alpha$ .

Тоді, як видно з рисунку 58, при малих кутах  $\alpha$  відстань між джерелами  $S_1$  і  $S_2$ , наближено дорівнює:

$$d \approx 2\alpha a \quad ; \quad (2.189)$$

відстань між джерелами  $S_1$  ;  $S_2$  і екраном наближено дорівнює:

$$l \approx a + b \quad ; \quad (2.190)$$

ширина області спостереження інтерференційної картини наближено дорівнює:

$$x \approx 2\alpha b \quad . \quad (2.191)$$

Підставляючи наближені рівності (2.189), (2.190) і (2.191) у вираз (2.169) одержимо ширину інтерференційної смуги:

$$\Delta x = \frac{\lambda(a+b)}{2\alpha a} = \frac{\lambda}{2\alpha} \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \quad . \quad (2.192)$$

Оскільки область спостереження інтерференційної картини обмежена, то буде обмеженою і максимально можлива кількість світлих смуг інтерференційної картини.

Позначимо через  $N$  - максимально можливу кількість світлих смуг інтерференційної картини, вона буде дорівнювати відношенню ширини області спостереження інтерференційної картини до ширини інтерференційної смуги:

$$N = \frac{x}{\Delta x} = \frac{2\alpha a \cdot 2\alpha b}{\lambda(a+b)} = \frac{4\alpha^2 ab}{\lambda(a+b)},$$

тобто:

$$N = \frac{4\alpha^2 ab}{\lambda(a+b)}. \quad (2.193)$$

Якщо на біпризму Френеля падає плоска монохроматична хвиля (у цьому випадку  $a \rightarrow \infty$ ), то:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}; \quad N = \frac{4\alpha^2 b}{\lambda}. \quad (2.194)$$

### Кільця Ньютона.

Якщо на скляну пластинку покласти лінзу, то можна спостерігати інтерференційну картину, у вигляді колових смуг, яка виникає при накладанні світла відбитого від внутрішньої грані лінзи і світла відбитого від зовнішньої грані скляної пластинки (див. рисунок 59).

Радіус кривизни внутрішньої грані лінзи позначений через  $R$ , товщина малого зазору між лінзою і скляною пластинкою позначена через  $h$ , радіус темного кільця позначено через  $r_m$ . Промінь світла 1, при відбитті від внутрішньої грані лінзи, не змінює своєї фази коливальності, а промінь світла 2, при відбитті від пластинки, змінює фазу коливальності на протилежну (див. § 2.7), що еквівалентно зменшенню або збільшенню оптичної різниці ходу між променями на половину довжини хвилі світла.

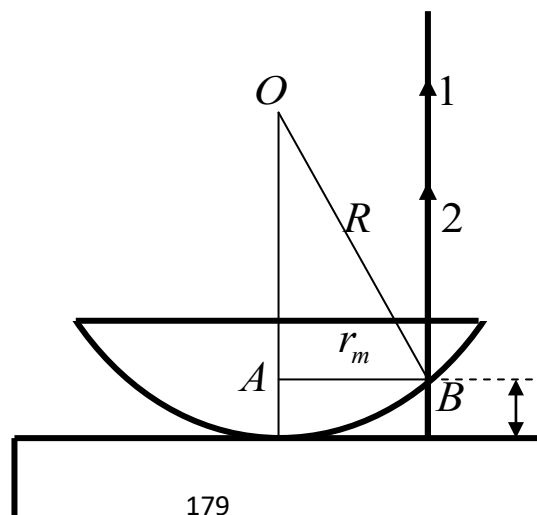


Рис. 59.

Тому, оптична різниця ходу між променями 1 і 2, як видно з рисунку 59, дорівнює:

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2} \quad . \quad (2.195)$$

З іншого боку, для темного кільця, оптична різниця ходу променів, за умовою спостереження мінімуму інтенсивності світла (2.162), повинна дорівнювати:

$$\Delta = \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad . \quad (2.196)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (2.195) і (2.196) маємо:

$$2h = m\lambda \quad . \quad (2.197)$$

Ширину повітряного зазору можна виразити через радіус темного кільця. Записуючи теорему Піфагора для прямокутного трикутника  $OAB$  і враховуючи, що ширина зазору мала у порівнянні з радіусом лінзи і радіусом кільцевої смуги  $h \ll R$ ;  $h \ll r_m$ , одержимо:

$$\begin{aligned} R^2 &= r_m^2 + (R - h)^2 \\ &\Downarrow \\ R^2 &= r_m^2 + R^2 - 2hR + h^2 \\ &\Downarrow \\ r_m^2 &\approx 2hR \\ &\Downarrow \\ 2h &= \frac{r_m^2}{R} \quad . \quad (2.198) \end{aligned}$$

Підставляючи рівність (2.198) у вираз (2.197) знаходимо радіус темної кільцевої смуги:

$$\begin{aligned} \frac{r_m^2}{R} &= m\lambda \\ &\Downarrow \\ r_m &= \sqrt{m\lambda R} \quad . \quad (2.199) \end{aligned}$$

Для світлих кільцевих смуг оптична різниця ходу променів (2.195) повинна дорівнювати цілому числу довжин хвиль, звідси випливає:

$$\begin{cases} 2h + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \\ 2h = \frac{r_m^2}{R} \end{cases} \quad \Downarrow$$

$$\frac{r_m^2}{R} = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \Downarrow$$

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda R} \quad . \quad (2.200)$$

Формула (2.200) визначає радіус  $m$ -тої світлої кільцевої смуги.  
**Інтерференція в тонких плівках.**

Нехай на прозору тонку плівку, товщиною  $h$ , під кутом  $\alpha$  падає монохроматична плоска хвиля. Показник заломлення для плівки позначимо через  $n$ .

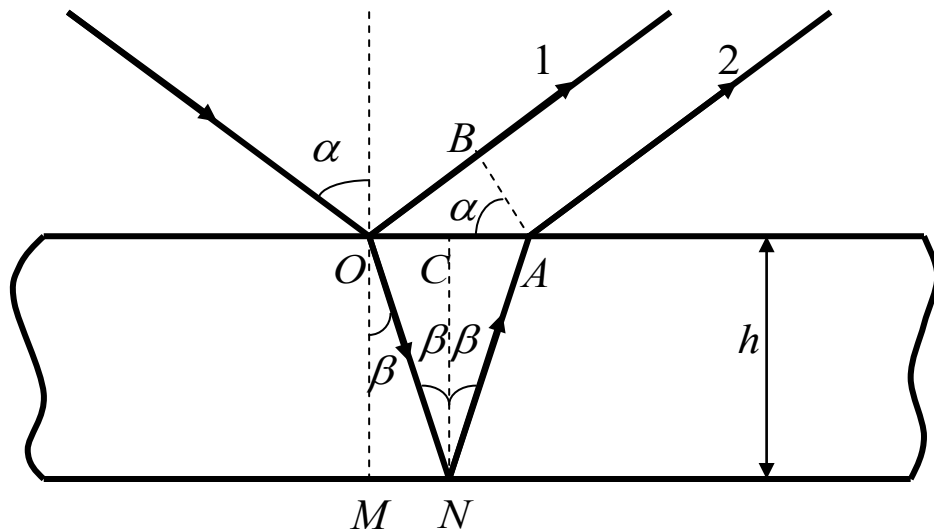


Рис. 60.

Падаюча на плівку хвиля розділяється на дві хвилі, перша хвиля утворюється при відбиванні частини світла від верхньої грані плівки, друга хвиля утворюється при відбиванні світла від нижньої грані плівки.

Хвиля 2 відстає від хвилі 1 на оптичну різницю ходу  $n(ON + NA)$ , але хвильовий фронт хвилі 2 випереджає хвильовий фронт хвилі 1 на відстань  $OB$ , як видно з рисунку 60.

Окрім цього, хвиля 1, при відбитті від границі з більшим показником заломлення змінює фазу коливань на протилежну, а хвиля 2 при відбитті не змінює фазу коливань, якщо плівка у повітрі. Внаслідок цього оптична різниця ходу між хвилями 1 і 2 додатково зменшиться на половину довжини хвилі світла і дорівнюватиме:

$$\Delta = n(ON + NA) - OB - \frac{\lambda}{2} . \quad (2.201)$$

Якщо плівка знаходиться на поверхні речовини з більшим показником заломлення, ніж у плівки, то обидві хвилі змінять фазу коливань на протилежну, що не впливає на отриману при розділенні падаючої хвилі оптичну різницю ходу хвиль 1 і 2. У цьому випадку оптична різниця ходу дорівнюватиме:

$$\Delta = n(ON + NA) - OB . \quad (2.202)$$

Прямокутні трикутники  $ONC$  і  $CNA$ , показані на рисунку 60, рівні. Звідси випливає, що  $ON = NA$ . Враховуючи це, оптичну різницю ходу (2.202) можна записати у вигляді:

$$\Delta = 2n \cdot ON - OB . \quad (2.203)$$

З прямокутного трикутника  $ONC$  випливає:

$$ON = \frac{h}{\cos \beta} .$$

Тому, оптична різниця ходу (2.203) дорівнює:

$$\Delta = \frac{2nh}{\cos \beta} - OB . \quad (2.204)$$

З прямокутного трикутника  $OAB$  маємо:

$$OB = OA \sin \alpha .$$

Оскільки прямокутні трикутники  $ONC$  і  $CNA$ , показані на рисунку 60, рівні, то  $OC = CA$ , звідси випливає, що  $OA = 2OC$ , тоді:

$$OB = 2OC \sin \alpha . \quad (2.205)$$

З прямокутного трикутника  $ONC$ , показаного на рисунку 60, випливає, що  $OC = h \operatorname{tg} \beta$ . Тому, рівність (2.205) можна записати у вигляді:

$$OB = 2h \operatorname{tg} \beta \sin \alpha \quad . \quad (2.206)$$

Підставляючи рівність (2.206) у вираз (2.204) маємо:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2nh}{\cos \beta} - 2h \operatorname{tg} \beta \sin \alpha \\ &\Downarrow \\ \Delta &= \frac{2h(n - \sin \alpha \sin \beta)}{\cos \beta} \quad . \quad (2.207) \end{aligned}$$

Використовуючи закон заломлення світла можна виразити тригонометричні функції від кута  $\beta$  через тригонометричні функції від кута падіння  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= n \\ &\Downarrow \\ \sin \beta &= \frac{1}{n} \sin \alpha ; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \quad . (2.208) \end{aligned}$$

Підставляючи вирази (2.208) у рівність (2.207) знаходимо:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2h \left( n - \sin \alpha \cdot \frac{1}{n} \sin \alpha \right)}{\frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad . \\ &\Downarrow \\ \Delta &= \frac{2h(n^2 - \sin^2 \alpha)}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \\ &\Downarrow \\ \Delta &= 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \quad . \quad (2.209) \end{aligned}$$



Якщо оптична різниця ходу хвиль (2.209) буде дорівнювати цілому числу довжин хвиль світла, то при накладанні хвиль буде спостерігатись максимум інтенсивності світла:

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = m\lambda \quad (2.210)$$

Якщо оптична різниця ходу хвиль (2.209) буде дорівнювати напівцілому числу довжин хвиль світла, то при накладанні хвиль буде спостерігатись мінімум інтенсивності світла:

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (2.211)$$

Для плівки у повітрі, як випливає з виразу (2.201) умови для спостереження максимуму і мінімуму інтенсивності світла міняються місцями.

З інтерференцією у тонких плівках тісно пов'язаний один з засобів підвищення працездатності оптичних приладів, який має назву «просвітлення оптики». При проходженні світла через скляні лінзи або призми частина світла відбивається від скла і втрачається.

Для зменшення коефіцієнту відбиття світла від поверхні лінзи або призми на скло наносять тонкий шар прозорої речовини такої товщини і з таким показником заломлення, що б для тонкого шару виконувалась умова (2.211) і інтенсивність відбитого світла була найменша.

Розглянемо випадок нормального падіння світла на скло, покрите тонкою плівкою. Показник заломлення тонкого шару на склі повинен бути таким, що б при поверненні у повітря проекція напруженості електричного поля у світла, відбитого від обох поверхонь плівки була однаковою.

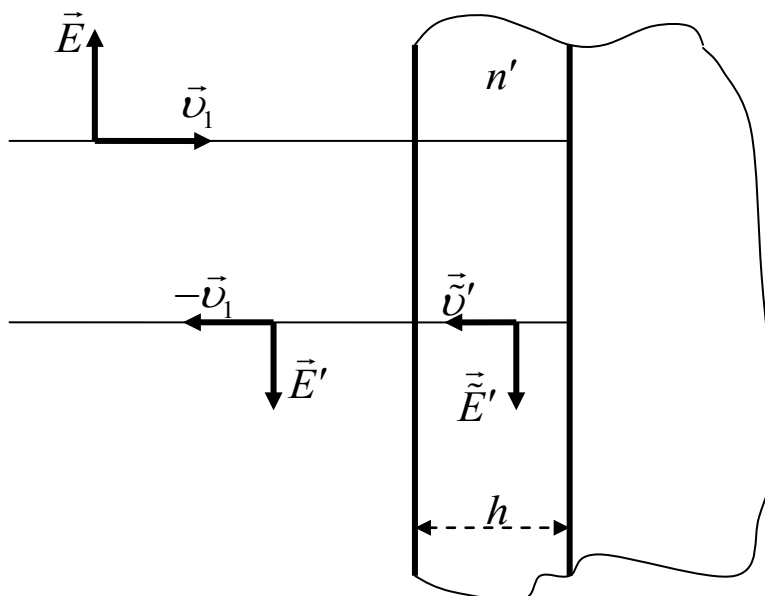


Рис. 61.

Позначимо показник заломлення плівки через  $n'$ , показник заломлення скла через  $n$ , показник заломлення для повітря будемо вважати рівним одиниці. Напруженість електричного поля падаючого світла позначимо через  $\vec{E}$ , напруженість електричного поля світла, відбитого від границі повітря-плівка, позначимо через  $\vec{E}'$ ; напруженість електричного поля світла, відбитого від границі плівка-скло, позначимо через  $\vec{\tilde{E}}'$ . Якщо знехтувати малою зміною амплітуди напруженості електричного поля при заломленні на границі повітря-плівка, то за формулою (2.138) маємо:

$$\begin{cases} E'_y = \frac{(1-n')}{1+n'} E_y \\ \vec{\tilde{E}}'_y \approx \frac{(n'-n)}{n'+n} E_y \end{cases} . \quad (2.212)$$

Покладаючи проекції напруженості електричного поля у виразі (2.212) рівними ( $E'_y = \vec{\tilde{E}}'_y$ ), знаходимо показник заломлення для плівки:

$$\begin{aligned} \frac{1-n'}{1+n'} &= \frac{n'-n}{n'+n} \\ \Downarrow \\ \cancel{n'} + n - (n')^2 - \cancel{n'n} &= \cancel{n'} - n + (n')^2 - \cancel{n'n} \\ \Downarrow \\ 2(n')^2 &= 2n \\ \Downarrow \\ n' &= \sqrt{n} \end{aligned} . \quad (2.213)$$

Таким чином, якщо показник заломлення плівки дорівнює кореню квадратному з показника заломлення скла, то амплітуди напруженості електричного поля у світла, відбитого від обох поверхонь плівки будуть приблизно однаковими.

Товщину плівки  $h$  потрібно вибрати такою, що б виконувалась умова спостереження мінімуму інтенсивності світла (2.211). Покладаючи у

формулі (2.211) кут падіння рівним нулю  $\alpha = 0$ , і показник заломлення плівки рівним кореню квадратному з показника заломлення скла, знаходимо товщину плівки:

$$2h\sqrt{n} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$h = \frac{(2m+1)\lambda}{4\sqrt{n}} \quad (2.214)$$

Мінімальній товщині плівки буде відповідати значення цілого числа рівне нулю  $m = 0$ , тобто:

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n}} \quad (2.215)$$

Для середньої довжини сонячного світла  $\lambda = 550 \text{ нм}$  і показника заломлення скла  $n = 1,5$  мінімальна товщина плівки:  $h_{\min} \approx 0,1 \text{ мкм}$ .

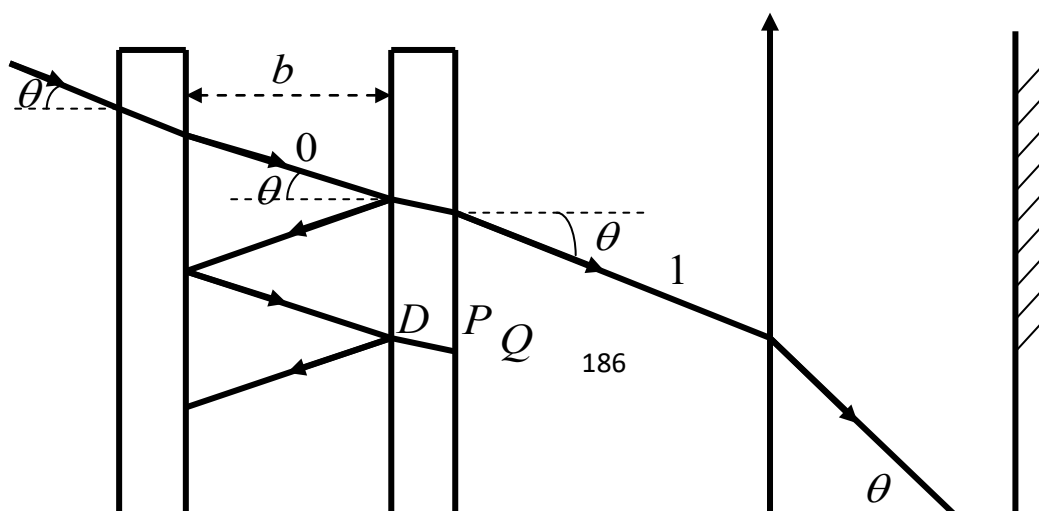
Оскільки довжина когерентності для звичайного світла мала, то товщина плівки повинна бути порядку декількох довжин хвиль світла.

### Багатопроменева інтерференція. Інтерферометр Фабрі – Перо.

Розподіл амплітуд коливань і інтенсивностей світла, який виникає при накладанні багатьох когерентних хвиль називають багатопроменевою інтерференцією.

При накладанні великої кількості когерентних хвиль суттєво змінюється характер розподілу інтенсивності світла в інтерференційній картині, утворюються вузькі максимуми, розділені широкими темними смугами. Завдяки цьому, багатопроменева інтерференція має важливе практичне застосування.

В якості прикладу багатопроменевої інтерференції розглянемо принцип дії інтерферометру Фабрі – Перо, яка ілюструється на рисунку 62.



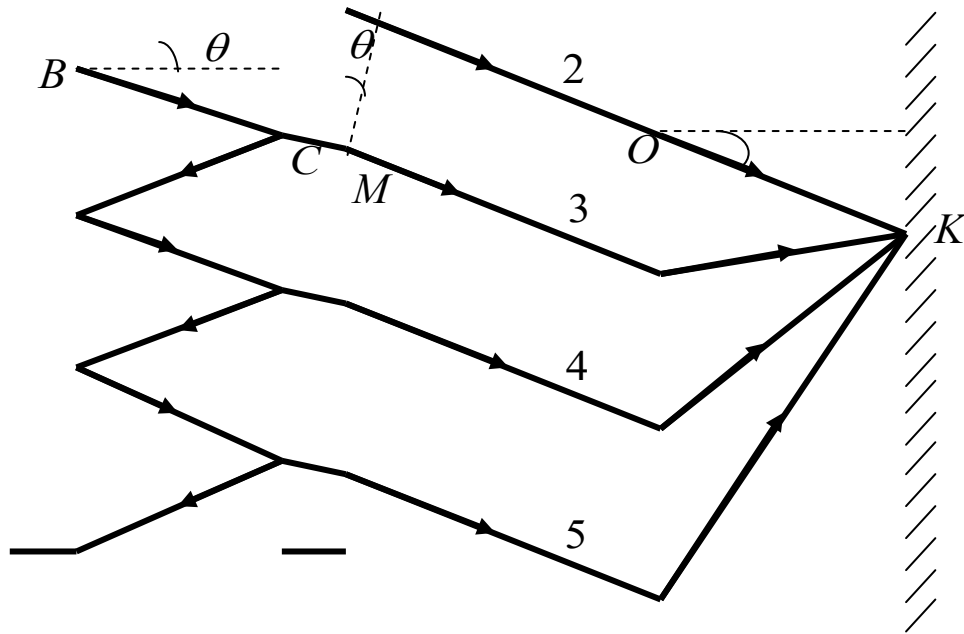


Рис. 62.

Інтерферометр Фабрі – Перо найчастіше це дві паралельні кварцові пластини, покриті відбиваючим шаром, між якими знаходиться повітря. На рисунку 62 зображений промінь світла  $O$ , який ззовні попадає у повітряний прошарок між пластинами, амплітуду і інтенсивність якого позначимо через  $A_0$ ;  $J_0$ , кут падіння на платину позначений через  $\theta$ . Відстань між пластинами позначена через  $b$ .

Внаслідок багатократного відбиття від пластин промінь світла  $O$  розділяється на паралельні промені  $1, 2, 3, \dots$ , амплітуди і інтенсивності яких позначимо через  $A_1, A_2, A_3, \dots$ ;  $J_1, J_2, J_3, \dots$ .

Якщо позначити через  $\rho$  коефіцієнт відбиття світла від пластини, то у відсутності поглинання світла коефіцієнт проходження дорівнює  $1 - \rho$ .

За виразом (2.147) знаходимо зв'язок між амплітудами утворених променів світла:

$$A_1 = (1 - \rho) A_0, \quad A_2 = \rho(1 - \rho) A_0, \quad A_3 = \rho^2(1 - \rho) A_0, \dots \quad (2.216)$$

Оптична різниця ходу між будь якими сусідніми променями, як видно з рисунку 62, однакова і дорівнює:

$$\Delta = BD + BC - PQ \quad . \quad (2.217)$$

З рівнобедреного трикутника  $BCD$  знаходимо:

$$BD = BC = \frac{b}{\cos \theta} \quad , \quad (2.218)$$

$$DC = 2b \operatorname{tg} \theta \quad . \quad (2.219)$$

Оскільки  $DC = PM$  , то з прямокутного трикутника  $PQM$  маємо:

$$PQ = PM \sin \theta = 2b \operatorname{tg} \theta \sin \theta \quad . \quad (2.220)$$

Підставляючи рівності (2.218) і (2.220) у вираз (2.217) одержимо оптичну різницю ходу між сусідніми променями:

$$\Delta = \frac{2b}{\cos \theta} - 2b \operatorname{tg} \theta \sin \theta = \frac{2b(1 - \sin^2 \theta)}{\cos \theta}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = 2b \cos \theta \quad . \quad (2.221)$$

Якщо оптична різниця ходу між сусідніми променями однакова, то буде однаковою і різниця фаз коливань між сусідніми променями.

Позначимо через  $\delta$  - різницю фаз коливань між сусідніми променями. Згідно виразу (2.160) вона дорівнює:

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 2b \cos \theta}{\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta = \frac{4\pi b \cos \theta}{\lambda} \quad . \quad (2.222)$$

Якщо позначити через  $\varphi_1$  - фазу коливань першого променя, в момент його прибуття до екрану, то фази коливань другого, третього і т. д. променів дорівнюватимуть:

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \delta \quad ; \quad \varphi_3 = \varphi_1 - 2\delta \quad ; \quad \varphi_4 = \varphi_1 - 3\delta \quad ; \quad \varphi_5 = \varphi_1 - 4\delta \quad ; \quad \dots \quad (2.223)$$

Використовуючи вирази (2.216) і (2.223) рівняння хвиль можна записати у комплексній формі (див. додаток Б):

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= (1-\rho) A_0 \exp\{i\varphi_1\} ; \\ \hat{a}_2 &= \rho(1-\rho) A_0 \exp\{i(\varphi_1 - \delta)\} ; \\ \hat{a}_3 &= \rho^2(1-\rho) A_0 \exp\{i(\varphi_1 - 2\delta)\} ; \\ \hat{a}_4 &= \rho^3(1-\rho) A_0 \exp\{i(\varphi_1 - 3\delta)\} ; \dots\end{aligned}\quad (2.224)$$

Сумуючи рівняння (2.224) і використовуючи формулу для суми геометричної прогресії, знаходимо рівняння сумарної хвилі у точці екрану в комплексній формі:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \dots = \\ &= (1-\rho) A_0 \exp\{i\varphi_1\} (1 + \rho \exp\{-i\delta\} + \rho^2 \exp\{-2i\delta\} + \dots) = \\ &= \frac{(1-\rho) A_0 \exp\{i\varphi_1\}}{1 - \rho \exp\{-i\delta\}} ;\end{aligned}$$

тобто:

$$\hat{a} = \frac{(1-\rho) A_0 \exp\{i\varphi_1\}}{1 - \rho \exp\{-i\delta\}} . \quad (2.225)$$

Квадрат амплітуди сумарної хвилі у точці екрану  $K$  дорівнює добутку величини  $\hat{a}$ , яка визначається виразом (2.225), і комплексно спряженої до неї величини  $\hat{a}^*$ :

$$\begin{aligned}A^2 = \hat{a}\hat{a}^* &= \frac{(1-\rho) A_0 \exp\{i\varphi_1\}}{1 - \exp\{-i\delta\}} \cdot \frac{(1-\rho) A_0 \exp\{-i\varphi_1\}}{1 - \exp\{i\delta\}} = \\ &= \frac{(1-\rho)^2 A_0^2}{1 + \rho^2 - \rho(\exp\{i\delta\} + \exp\{-i\delta\})} = \frac{(1-\rho)^2 A_0^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \delta} ,\end{aligned}$$

тобто:

$$A^2 = \frac{(1-\rho)^2 A_0^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \delta} . \quad (2.226)$$

Інтенсивність хвилі, згідно виразу (1.315) прямо пропорційна до квадрату амплітуди коливань, помножуючи рівність (2.226) на відповідну

постійну величину  $i$ , підставляючи різницю фаз (2.222), одержимо залежність інтенсивності сумарної хвилі від кута  $\theta$ :

$$J = \frac{(1-\rho)^2 J_0}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos\left(\frac{4\pi b}{\lambda} \cos\theta\right)} . \quad (2.227)$$

Якщо  $\frac{4\pi b}{\lambda} \cos\theta = 2\pi m$ ;  $m \in Z$ , що еквівалентно умові спостереження максимуму інтенсивності світла при накладанні сусідніх променів:

$$2b \cos\theta = m\lambda ; \quad m \in Z , \quad (2.228)$$

то інтенсивність сумарної хвилі максимальна і дорівнює:

$$J = \frac{(1-\rho)^2 J_0}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(2\pi m)} = \frac{\cancel{(1-\rho)^2} J_0}{\cancel{(1-\rho)^2}} = J_0 . \quad (2.229)$$

Якщо  $\frac{4\pi b}{\lambda} \cos\theta = (2m+1)\pi$ ;  $m \in Z$ , що еквівалентно умові спостереження мінімуму інтенсивності світла при накладанні сусідніх променів:

$$2b \cos\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda ; \quad m \in Z , \text{ то інтенсивність сумарної хвилі мінімальна}$$

і дорівнює:

$$J = \frac{(1-\rho)^2 J_0}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos((2m+1)\pi)} = \frac{(1-\rho)^2 J_0}{(1+\rho)^2} = \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 J_0 . \quad (2.230)$$

Інтерференційна картина на екрані має вигляд світлих і темних концентричних кілець, що чергуються. Чим більший коефіцієнт відбиття, тим більш вузькими стають інтерференційні максимуми інтенсивності.

Однією з найважливіших характеристик інтерферометру є кутова дисперсія:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} , \quad (2.231)$$

вона визначає кутову відстань між максимумами одного порядку, для яких різниця довжин хвиль становить одиницю довжини. Чим більша кутова дисперсія, тим більша розрізнявальна здатність інтерферометру.

Беручі диференціал від обох частин умови спостереження максимуму інтенсивності (2.228) та враховуючи, що  $\frac{m}{2b} = \frac{\cos \theta}{\lambda}$ , знаходимо:

$$\begin{aligned}
 -2b \sin \theta d\theta &= m d\lambda \\
 \Downarrow \\
 \frac{d\theta}{d\lambda} &= -\frac{m}{2b \sin \theta} \\
 \Downarrow \\
 \frac{d\theta}{d\lambda} &= -\frac{\cos \theta}{\lambda \sin \theta} \quad . \quad (2.232)
 \end{aligned}$$

Для малих кутів  $\theta$ :  $\cos \theta \approx 1$ ;  $\sin \theta \approx \theta$ , тому кутова дисперсія (2.232) наближено дорівнює:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \approx -\frac{1}{\lambda \theta} \quad , \quad (2.233)$$

де знак мінус показує, що при збільшенні довжини хвилі зменшується кут  $\theta$ , під яким спостерігається максимум інтенсивності світла.

Оскільки кутова дисперсія інтерферометру Фабрі – Перо значно перевищує кутову дисперсію інших спектральних приладів, то він має широке застосування при дослідженні надтонкої структури спектральних ліній.

## 2.9. Принцип Гюйгенса – Френеля. Дифракція світла.

**Дифракція світла** – відхилення світла від прямолінійного напрямку поширення, пов'язане з неоднорідністю середовища.

Інше, більш спрощене, визначення дифракції світла це здатність хвиль огинати перешкоди.

Взагалі, дифракційні явища можна описати рівняннями Максвелла, з додатковими граничними умовами. Але, такий підхід містить суттєві математичні ускладнення. Тому, у більшості випадків користуються наближеним методом знаходження розподілу інтенсивності світла, який ґрунтується на принципі Гюйгенса – Френеля.

**Принцип Гюйгенса – Френеля** – всі елементи хвильової поверхні або фронту можна вважати точковими джерелами вторинних, сферичних хвиль, амплітуду результуючого коливання хвилі у довільній точці



простору  $P$  можна знаходити як результат інтерференції всіх вторинних хвиль.

Згідно принципу Гюйгенса - Френеля хвильовий фронт у наступний момент часу є результатом інтерференції всіх вторинних хвиль.

Якщо світло поширюється в однорідному середовищі, то форма хвильового фронту, при інтерференції вторинних хвиль, зберігається: плоский фронт лишається плоским, сферичний фронт лишається сферичним і т. д.

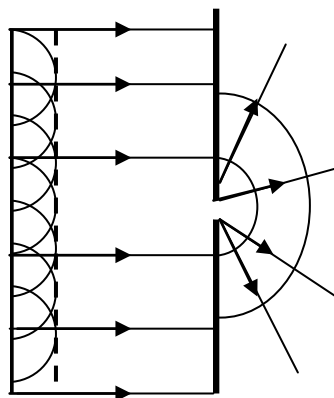


Рис. 63.

На рисунку 63 схематично зображене поширення плоскої хвилі до перешкоди, яка є непрозорим екраном з вузькою щілиною, і поширення хвилі після перешкоди.

Через вузьку щілину перешкоди зможе пройти тільки мала частина хвильового фронту, яка, згідно принципу Гюйгенса – Френеля, буде мати циліндричну форму. Тому, після перешкоди, світло може поширюватись у напрямках всіх променів, перпендикулярних до нового, циліндричного фронту хвилі. Таким чином, світло огинає краї вузької щілини.

Математичне формулювання принципу Гюйгенса – Френеля для результуючої амплітуди напруженості електричного поля виглядає наступним чином:

$$E_m = \int_S K(\vartheta) \frac{a_0}{r} \cos(kr + \varphi_0) dS, \quad (2.234)$$

де інтегрування проводиться по хвильовій поверхні  $S$ , величина  $a_0$  визначається амплітудою хвилі, відповідної елементу поверхні  $dS$ .

Підінтегральний вираз залежить від певної функції  $K(\vartheta)$ , де  $\vartheta$  - кут між хвильовим вектором, відповідним елементу поверхні  $dS$ , і напрямом від елементу поверхні до точки простору  $P$ , в якій відбувається

інтерференція вторинних хвиль. При збільшенні кута  $\vartheta$  значення функції  $K(\vartheta)$  зменшується.

Знаходження результуючої амплітуди за виразом (2.234) в загальному випадку непросте. Але, в найпростіших випадках, інтегрування, як показав Френель, можна замінити звичайним алгебраїчним або графічним додаванням (за методом векторних діаграм).

Сумування коливань, що надходять від різних елементів хвильової поверхні, Френель запропонував виконувати за допомогою розбиття хвильової поверхні на зони, конфігурація яких залежить від симетрії неоднорідності середовища. Ці зони називають зонами Френеля.

**Зони Френеля** – це ділянки хвильової поверхні, вибрані таким чином, що в відстані від границь сусідніх ділянок до точки спостереження  $P$  відрізнялись на половину довжини хвилі, тобто на  $\frac{\lambda}{2}$ .

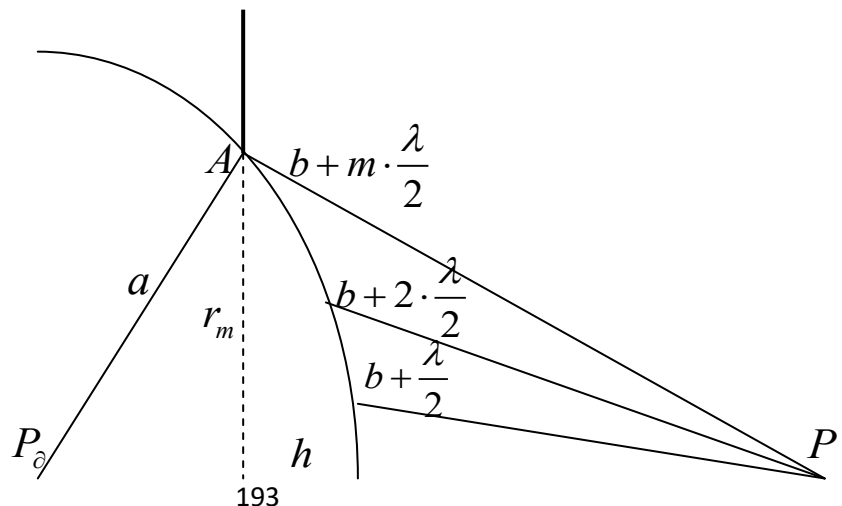
## 2.10. Дифракція на круглому отворі за методом Френеля.

На рисунку 64 показано розбиття сферичної хвильової поверхні світла від точкового джерела  $P_0$ , яке проходить через круглий отвір радіусом  $r_m$ , на зони Френеля. У даному випадку, зони Френеля це кільцеві ділянки сфери, центри яких розташовані на осі отвору.

Радіус сферичної хвильової поверхні світла, в момент проходження отвору позначений через  $a$ , відстань від центру сферичної хвильової поверхні  $O$  до точки спостереження  $P$  позначена через  $b$ .

Зони Френеля пронумеровані від центру сферичної хвильової поверхні до країв отвору. Кількість зон Френеля, що вкладаються у круглий отвір позначена через  $m$ . Тому, радіус отвору позначений з відповідним індексом -  $r_m$ .

Відстань від центру сферичної хвильової поверхні  $O$  до центру отвору  $O'$  позначена через  $h$ .



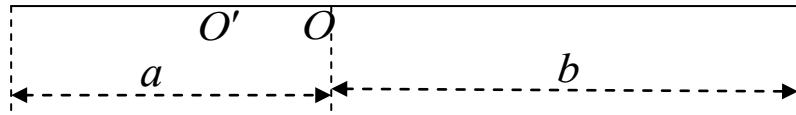


Рис. 64.

Записуючи теорему Піфагора для прямокутних трикутників  $P_{\circ}O'A$  і  $AO'P$  маємо:

$$\begin{cases} a^2 = r_m^2 + (a-h)^2 \\ \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 = r_m^2 + (b+h)^2 \end{cases} \\ \Downarrow \\ \begin{cases} r_m^2 - 2ah + h^2 = 0 \\ r_m^2 + 2hb + h^2 = m\lambda b + \frac{1}{4}m^2\lambda^2 \end{cases} \quad (2.235)$$

Якщо знехтувати малими доданками:  $h^2 \approx 0$  ;  $\frac{1}{4}m^2\lambda^2 \approx 0$ , то з системи рівнянь (2.235) випливає:

$$\begin{cases} r_m^2 = 2ah \\ r_m^2 + 2hb = m\lambda b \end{cases} \\ \Downarrow \\ r_m = \sqrt{\frac{m\lambda b}{1 + \frac{b}{a}}} \quad (2.236)$$

Отриманий вираз (2.236) відображає зв'язок між радіусом отвору і кількістю зон Френеля, які вкладаються у круглий отвір.

Для плоскої хвилі, яка нормально падає на екран з отвором (у цьому випадку  $a \rightarrow \infty$ ), вираз (2.236) буде таким:

$$r_m = \sqrt{mb\lambda} \quad (2.237)$$

Зони Френеля, як випливає з формули (2.236), мають практично однакову площу:

$$S_m \approx \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \frac{\pi mb\lambda - \pi(m-1)b\lambda}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{\pi b\lambda}{1 + \frac{b}{a}},$$

$$\text{тобто: } S_m \approx \frac{\pi b \lambda}{1 + \frac{b}{a}} . \quad (2.238)$$

Але, амплітуди вторинних хвиль монотонно і слабо зменшуються зі зростанням номеру зони, внаслідок збільшення кута між хвильовим вектором, відповідним зоні, і напрямом від зони до точки  $P$  та збільшення відстані між зоною і точкою  $P$  і будуть виконуватись нерівності:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_m . \quad (2.239)$$

Позначимо амплітуди вторинних хвиль, що надходять у точку  $P$  від зон Френеля через  $A_1 ; A_2 ; A_3, \dots, A_m$ . Оскільки вторинні хвилі від сусідніх зон Френеля надходять у протифазі, то амплітуда сумарної хвилі дорівнює:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + \dots . \quad (2.240)$$

При невеликій кількості зон Френеля амплітуда сумарної хвилі буде залежати від парності числа зон Френеля  $m$ , що вкладаються у отвір.

Якщо кількість зон Френеля парна  $m = 2N$ , то центр екрану буде темним сумарна, оскільки амплітуди від сусідніх зон компенсують одна одну.

Якщо кількість зон Френеля непарна  $m = 2N + 1$ , то центр екрану буде світлим, оскільки амплітуда від однієї зони не буде скомпенсована.

Для круглого отвору великого радіусу, якому відповідає велика кількість зон Френеля, парність числа зон вже не суттєва.

Кожна амплітуда вторинної хвилі від зони Френеля, згідно нерівностям (2.239) менша за попередню амплітуду і більша за наступну амплітуду, звідси впливають наближені рівності:

$$A_2 \approx \frac{A_1 + A_3}{2} ; A_4 \approx \frac{A_3 + A_5}{2} ; A_6 \approx \frac{A_5 + A_7}{2} ; \dots (2.241)$$

Амплітуду сумарної хвилі (2.240), у випадку великої кількості зон Френеля, можна представити у такому вигляді:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots . (2.242)$$

Згідно наближеним рівностям (2.241) у виразі (2.242) всі доданки, окрім першого, дорівнюють нулю. Тому, для випадку круглого отвору великих розмірів, який відноситься до геометричної оптики, амплітуда сумарної хвилі наближено дорівнює половині амплітуди вторинної хвилі від першої зони Френеля:

$$A \approx \frac{A_1}{2} . \quad (2.243)$$

Існує технічний пристрій, який називають зонною пластинкою, в якому чергуються прозорі і непрозорі кільцеві ділянки. Непрозорі ділянки у зонній пластинці перекривають парні зони Френеля, що дозволяє у багато разів збільшити інтенсивність світла у центрі екрану.

Дифракційні явища поділяють на дифракцію Френеля – випадок сферичної форми хвильового фронту і дифракцію Фраунгофера – це випадок плоскої форми хвильового фронту. Існує інша назва дифракції Фраунгофера – дифракція в паралельних променях.

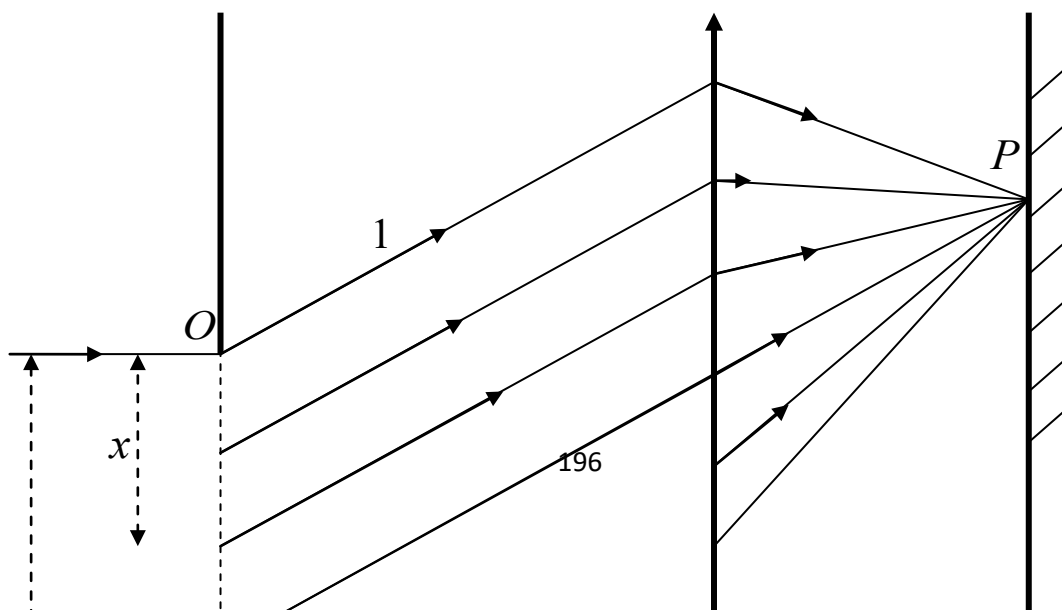
Обидва типи дифракції світла Френеля і Фраунгофера спостерігаються при невеликій кількості зон Френеля, відповідних перешкоді. Якщо кількість зон Френеля велика, то це випадок геометричної оптики.

Слід відмітити, що хоча метод Френеля є наближеним методом знаходження амплітуди сумарної хвилі, при інтерференції вторинних хвиль, він дає правильний розподіл інтенсивності світла для будь яких точок екрану, при малих кутах дифракції світла. Але, розрахунок фази сумарного коливання, за методом Френеля, дає неправильне значення фази, яке не збігається з експериментом.

Розглянемо декілька прикладів дифракції Фраунгофера.

## 2.11. Дифракція Фраунгофера на щілині.

На рисунку 65 схематично зображена експериментальна установка, яка дозволяє спостерігати дифракцію Фраунгофера на щілині.



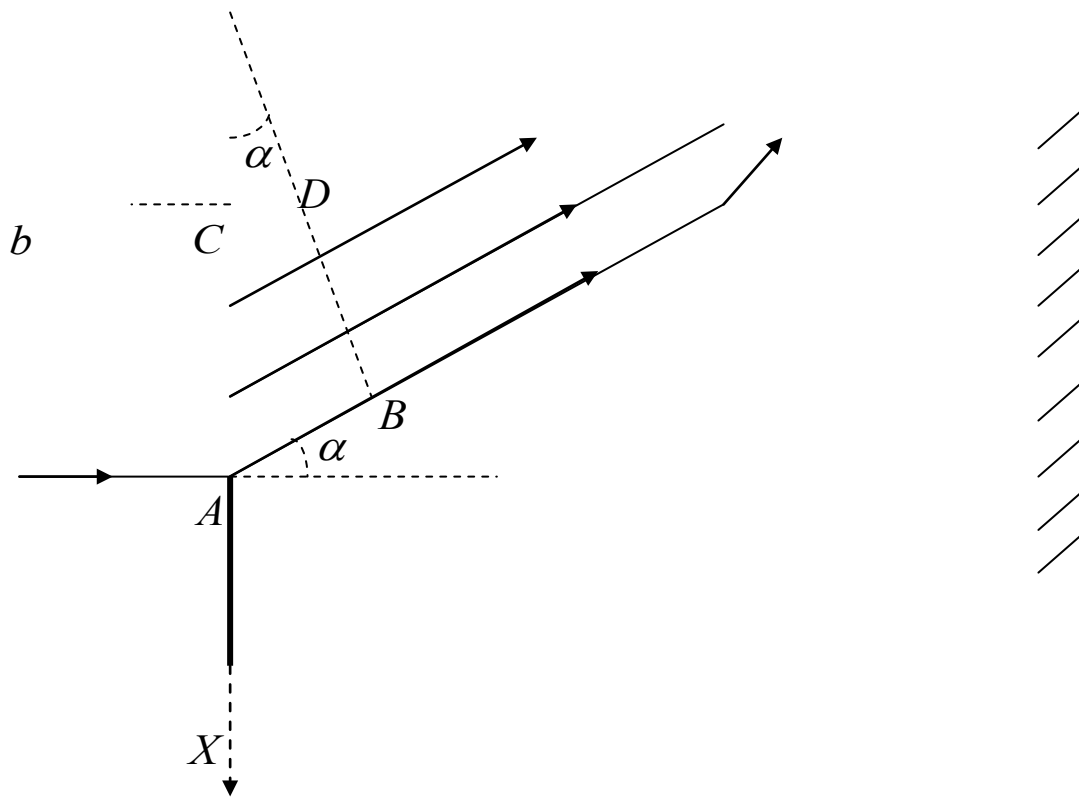


Рис. 65.

Плоска хвиля нормально падає на щілину, шириною  $b$ . Хвильовий фронт плоскої хвилі, яка поширюється під кутом  $\alpha$ , відносно напрямку поширення падаючої хвилі, позначений через  $OB$ . Вздовж щілини виберемо напрям осі координат  $X$ , як показано на рисунку 65.

Оптична різниця ходу між граничними променями, що проходять через щілину, дорівнює:

$$AB = b \sin \alpha \quad . \quad (2.244)$$

Хвильову поверхню падаючої хвилі  $OA$  можна розбити на зони Френеля.

Кількість зон Френеля  $N$ , що вкладаються у щілину, буде дорівнювати відношенню оптичної різниці ходу між граничними променями до половини довжини хвилі світла:

$$N = \frac{AB}{\frac{\lambda}{2}} \quad . \quad (2.245)$$

Підставляючи оптичну різницю ходу (2.244) у рівність (2.245) маємо:

$$N = \frac{2b \sin \alpha}{\lambda} \quad . \quad (2.246)$$

Якщо кількість зон Френеля буде непарною:  $N = 2m + 1$ , то під кутом  $\alpha$ , буде спостерігатись максимум інтенсивності світла:

$$2m + 1 = \frac{2b \sin \alpha}{\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$b \sin \alpha = \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad . \quad (2.247)$$

Отриманий вираз (2.247) є умовою спостереження максимуму інтенсивності світла, при дифракції Фраунгофера на щілині.

Якщо кількість зон Френеля буде парною:  $N = 2m$ , то під кутом  $\alpha$ , буде спостерігатись мінімум інтенсивності світла:

$$2m = \frac{2b \sin \alpha}{\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$b \sin \alpha = m\lambda \quad . \quad (2.248)$$

Отриманий вираз (2.248) є умовою спостереження мінімуму інтенсивності світла, при дифракції Фраунгофера на щілині.

З рисунку 65 видно, що оптична різниця ходу між вторинною хвилею від точки хвильової поверхні  $C$ , координата якої дорівнює  $x$ , і вторинною хвилею від граничної точки хвильової поверхні  $O$  дорівнює:

$$CD = x \sin \alpha \quad . \quad (2.249)$$

Тоді, відставання по фазі вторинної хвилі від точки хвильової поверхні  $C$  від вторинної хвилі, відповідної граничній точці хвильової поверхні  $O$ , згідно виразу (2.158), дорівнює:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot CD}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin \alpha}{\lambda} \quad . \quad (2.250)$$

Початкову фазу вторинної хвилі від граничної точки хвильової поверхні  $O$ , в момент надходження до точки спостереження  $P$ , без обмежень загальності можна покласти рівною нулю. Тоді, рівняння вторинної хвилі від точки  $C$ , згідно виразу (1.312), буде таким:

$$E_y^{e\text{тop}}(x) = E_m \cos(\omega t - \Delta\varphi) = E_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x \sin \alpha}{\lambda}\right),$$

де  $E_m$  - амплітуда коливань напруженості електричного поля.

Кількість вторинних хвиль, що припадає на малу ділянку щілини  $dx$  біля точки  $C$ , пропорційна до довжини ділянки, тому:

$$dE_y^{стоп} (x) = E_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi x \sin \alpha}{\lambda} \right) \frac{dx}{b} . \quad (2.251)$$

Для знаходження рівняння результуючої хвилі у точці  $P$ , що є сумою всіх вторинних хвиль, потрібно проінтегрувати рівняння (2.251) по хвильовій поверхні всередині щілини, координата  $x$  для якої змінюється в межах від  $0$  до  $b$  :

$$\begin{aligned} E_y &= \int dE_y^{стоп} = \frac{E_m}{b} \int_0^b \cos \left( \omega t - \frac{2\pi x \sin \alpha}{\lambda} \right) dx = \\ &= E_m \frac{E_m \lambda}{2\pi b \sin \alpha} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi x \sin \alpha}{\lambda} \right) \Big|_0^b = \\ &= \frac{E_m \lambda}{2\pi b \sin \alpha} \left\{ \sin \left( \omega t - \frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right) - \sin \omega t \right\} = \\ &= -E_m \frac{\sin \left( \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right) , \\ \text{тобто: } E_y &= -E_m \frac{\sin \left( \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right) . \quad (2.252) \end{aligned}$$

З одержаного рівняння (2.252) випливає, що амплітуда сумарної хвилі дорівнює:

$$E = E_m \frac{\sin \left( \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}} . \quad (2.253)$$

Підводячи рівність (2.253) до квадрату і помножуючи на відповідну постійну величину одержимо розподіл інтенсивності результуючої хвилі, в залежності від кута дифракції  $\alpha$  :



$$J = J_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\left( \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)^2}, \quad (2.254)$$

де  $J_0$  - інтенсивність падаючої хвилі.

Дифракційна картина на екрані буде мати вигляд чергування світлих і темних смуг, які плавно переходять одна в одну.

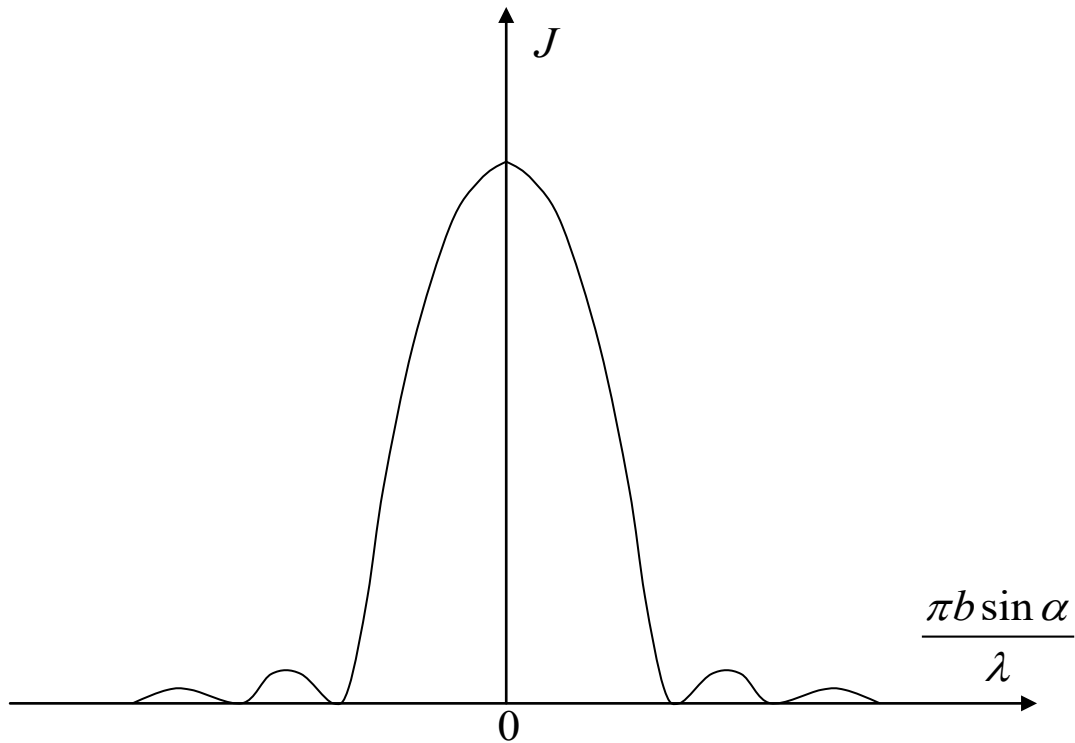


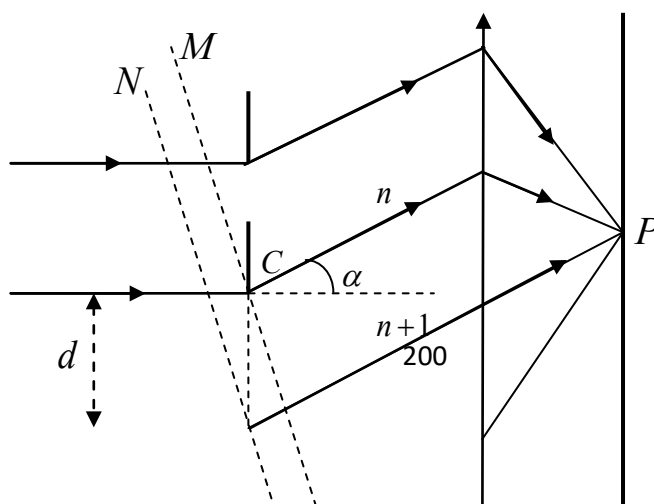
Рис. 66.

На рисунку 66 якісно показана залежність інтенсивності світла від безрозмірного параметру, який залежить від кута дифракції світла.

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на дифракційній решітці.

**Дифракційна решітка** – технічний пристрій, який складається з великої кількості малих прозорих та непрозорих ділянок, що чергуються.

Іншими словами: дифракційна решітка є сукупністю великої кількості, близько розташованих між собою, паралельних, вузьких щілин.



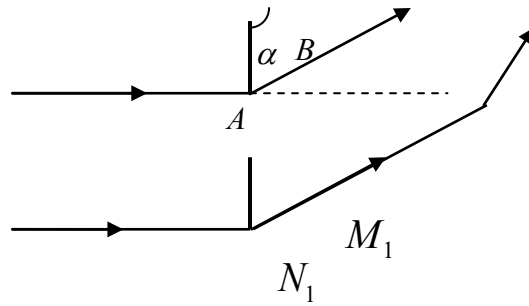


Рис.67.

На рисунку 67 схематично зображена дифракційна решітка, на яку падає плоска хвиля, перпендикулярно до площини дифракційної решітки. Вторинні хвилі, які відхиляються на кут  $\alpha$  від напрямку поширення падаючої хвилі, проходять через збиральну лінзу і інтерферують у точці екрану  $P$ .

**Постійна дифракційної решітки** – сумарна довжина однієї прозорої і однієї непрозорої ділянки.

На рисунку 67 постійна дифракційної решітки позначена через  $d$ .

Ще однією характеристикою дифракційної решітки є кількість штрихів на одиницю довжини, яку позначатимемо через  $N_d$ .

**Кількість штрихів на одиницю довжини** – величина, обернена до постійної решітки, яка чисельно дорівнює кількості прозорих ділянок, що припадають на одиницю довжини дифракційної решітки.

За визначенням кількість штрихів на одиницю довжини дорівнює:

$$N_d = \frac{1}{d} \quad . \quad [N_d] = m^{-1} \quad . \quad (2.255)$$

Хвильові поверхні вторинних хвиль від сусідніх щілин позначені через  $MM_1$  і  $NN_1$ . Оптична різниця ходу між вторинними хвилями від сусідніх щілин, як впливає з трикутника  $ABC$  на рисунку 67, дорівнює:

$$AB = d \sin \alpha \quad . \quad (2.256)$$

Якщо оптична різниця ходу (2.256) буде дорівнювати цілому числу довжин хвиль світла, то у точці спостереження  $P$ , згідно виразу (2.161), буде спостерігатись максимум інтенсивності світла:

$$d \sin \alpha = m \lambda \quad . \quad (2.257)$$

Рівність (2.257) називають умовою спостереження максимуму інтенсивності світла, при проходженні світла через дифракційну решітку.

Якщо оптична різниця ходу (2.256) буде дорівнювати напівцілому числу довжин хвиль світла, то у точці спостереження  $P$ , згідно виразу (2.162), буде спостерігатись мінімум інтенсивності світла:

$$d \sin \alpha = \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad . \quad (2.258)$$

Дифракційна картина має вигляд чергування світлих і темних смуг, симетричного відносно центру екрану. Фізичний зміст цілого числа  $m$  в умові (18) – це номер світлої смуги світла, відносно центру екрану. Ціле число  $m$  називають **порядком спектру**.

Вторинна хвилі від будь якої щілини відстає по фазі від вторинної хвилі, відповідної попередній щілині. Згідно виразу (2.158) різниця фаз між вторинними хвилями, відповідними сусіднім щілинам дорівнює:

$$\delta = \frac{2\pi \cdot AB}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \alpha}{\lambda} \quad . \quad (2.259)$$

Якщо позначити через  $\varphi_1$  - фазу коливань вторинної хвилі від першої щілини, в момент його прибуття до екрану, кількість щілин через  $N$ , то фази коливань вторинних хвиль від другої, третьої і т. д. щілин дорівнюватимуть:

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \delta ; \varphi_3 = \varphi_1 - 2\delta ; \dots ; \varphi_N = \varphi_1 - (N-1)\delta \quad . \quad (2.260)$$

Тоді, рівняння вторинних хвиль від щілин можна записати у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = E_m \cos \varphi \\ E_2 = E_m \cos(\varphi - \delta) \\ E_3 = E_m \cos(\varphi - 2\delta) \\ \vdots \\ E_N = E_m \cos(\varphi - (N-1)\delta) \end{array} \right. , \quad (2.261)$$

де  $E_m$  - амплітуда коливань напруженості електричного поля падаючої хвилі.

Сумуючи рівняння вторинних хвиль (2.261) знаходимо рівняння сумарної хвилі у точці екрану. Сума рівнянь (2.261) була знайдена у

першій частині посібника, розділ колювання і хвилі, у вигляді формули (4.1.94), згідно якій:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_N = \frac{E_m \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

тобто:

$$E = E_m \frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (2.262)$$

Інтенсивність хвилі, згідно виразу (1.315) прямо пропорційна до квадрату амплітуди колювань, помножуючи квадрат рівності (2.262) на відповідну постійну величину і, підставляючи різницю фаз (2.259), одержимо залежність інтенсивності сумарної хвилі від кута  $\alpha$  :

$$J = J_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}\right)} \quad (2.263)$$

При  $d \sin \alpha = m\lambda$ ;  $m \in Z$ , що еквівалентно умові спостереження максимуму інтенсивності світла при накладанні променів від сусідніх щілин, у формулі (2.263) виникає невизначеність типу  $\left(\frac{0}{0}\right)$ , після розкриття цієї невизначеності інтенсивність сумарної хвилі буде такою:

$$\begin{aligned} J &= J_0 \lim_{\theta \rightarrow \pi m} \frac{\sin^2(N\theta)}{\sin^2(\theta)} = \left| \frac{\beta = \theta - \pi m}{\theta = \beta + \pi m} \right| = J_0 \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(N\beta + N\pi m)}{\sin(\beta + \pi m)} \right)^2 = \\ &= J_0 \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \frac{\sin N\beta \cdot \cos N\pi m + \cos N\beta \cdot \sin N\pi m}{\sin \beta \cdot \cos \pi m + \cos \beta \cdot \sin \pi m} \right)^2 = \\ &= J_0 \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \frac{(-1)^{Nm} \sin N\beta}{(-1)^m \sin \beta} \right)^2 = J_0 \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2 = J_0 \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \frac{N\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}} \right)^2 = J_0 N^2 \end{aligned}$$

тобто: 
$$J = J_0 N^2 \quad . \quad (2.264)$$

З отриманого виразу (2.264) випливає, що у напрямках, відповідних умові максимуму (2.257), інтенсивність сумарної хвилі в  $N^2$  разів перевищує інтенсивність хвилі від однієї щілини.

## 2.12. Поляризоване та природне світло.

У розділі «Електромагнетизм» було показано, що світло це поперечна електромагнітна хвиля. Структура електромагнітної хвилі показана на рисунку 68.

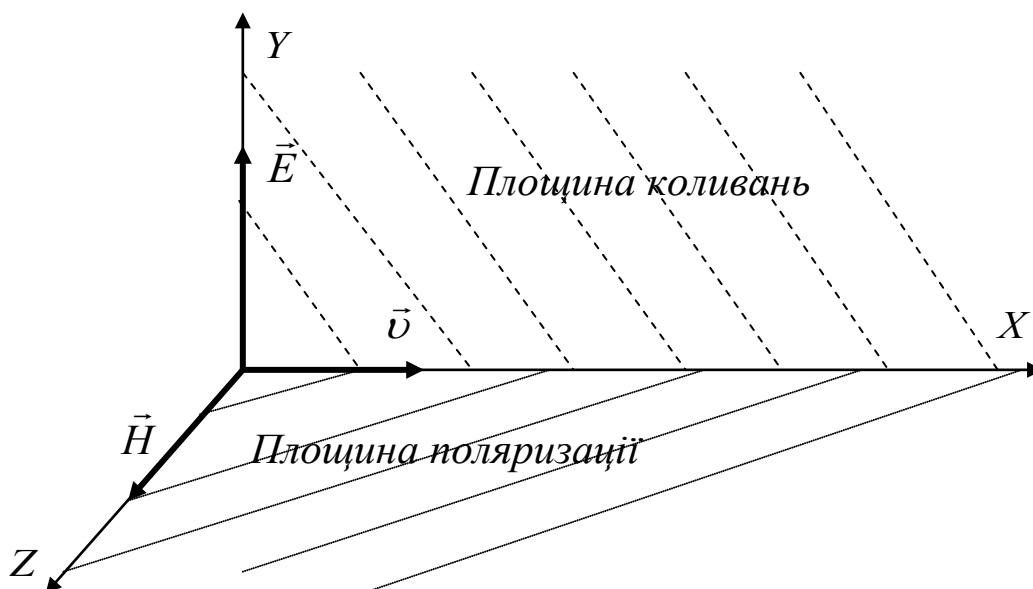


Рис. 68.

**Площина коливань** – це площина, яка проходить через напрям коливань напруженості електричного поля і напрям поширення хвилі.

**Площина поляризації** – це площина, яка проходить через напрям коливань вектора напруженості магнітного поля і напрям поширення хвилі.

У природного світла, яке є результатом накладання некогерентних хвиль, що випромінюються молекулами звичайного (не лазерного) джерела, напрям коливань вектора напруженості електричного поля і фаза коливань хаотично і безперервно змінюються. Тому, орієнтація площин коливань і поляризації теж хаотично змінюється з часом.

**Поляризоване світло** – це світло, у якого напрям коливань вектора напруженості електричного поля будь яким чином впорядкований.

**Плоско-поляризоване світло** – це світло, у якого напрям коливань вектора напруженості магнітного поля фіксований і не змінюється з часом.

**Еліптично-поляризоване світло** – це світло, у якого вершина вектора напруженості електричного поля обертається по еліпсу, площина еліпса перпендикулярна до напрямку поширення світла.

Частинним випадком еліптичної поляризації є кругова поляризація – вершина вектора напруженості електричного поля обертається по колу.

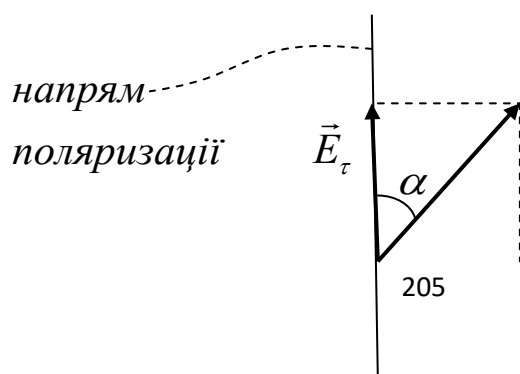
В залежності від напрямку обертання розрізняють праву і ліву еліптичну поляризацію. Якщо ми дивимось «назустріч» поширенню світла і бачимо обертання за годинниковою стрілкою, то еліптичну поляризацію називають правою, якщо бачимо обертання проти годинникової стрілки, то еліптичну поляризацію називають лівою.

Хвилю з еліптичною поляризацією завжди можна розкласти на суму двох плоско-поляризованих когерентних хвиль, однакового напрямку поширення, у яких взаємно перпендикулярні напрями коливань векторів напруженості електричних полів. Причому, різниця фаз коливань векторів напруженості електричних полів повинна бути постійною і не змінюватись з часом.

Аналогічно, природне світло теж завжди можна представити у вигляді суми двох некогерентних хвиль, однакового напрямку поширення, у яких взаємно перпендикулярні напрями коливань векторів напруженості електричних полів. Але різниця фаз коливань векторів напруженості електричних полів безперервно і хаотично змінюється з часом.

**Поляризатори** – кристали, після проходження яких природне світло стає плоско-поляризованим. Напрямок коливань вектора напруженості електричного поля у світла, після проходження поляризатора, називають напрямом поляризації.

Вектор напруженості електричного поля природного світла (напрямок коливань якого хаотично змінюється) можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові: складову паралельну до напрямку поляризації поляризатора, яку позначимо через  $\vec{E}_\tau$ , і складову перпендикулярну до напрямку поляризації поляризатора, яку позначимо через  $\vec{E}_n$ , як показано на рисунку 69.



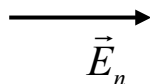


Рис. 69.

Поляризатор пропустить тільки складову напруженості електричного поля, паралельну до напрямку поляризації, що дорівнює:

$$E_{\tau} = E \cos \alpha \quad . \quad (2.265)$$

Підводячи рівність (2.265) до квадрату одержимо:

$$E_{\tau}^2 = E^2 \cos^2 \alpha \quad . \quad (2.266)$$

Кут  $\alpha$  змінюється хаотично в межах від  $0$  до  $\pi$ . Тому, середнє значення квадрату модуля складової, паралельної до напрямку поляризації дорівнює:

$$\begin{aligned} \langle E_{\tau}^2 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E_{\tau}^2 d\alpha = \frac{E^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{E^2}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = \\ &= \frac{E^2}{2\pi} \alpha \Big|_0^{\pi} + \frac{E^2}{4\pi} \sin 2\alpha \Big|_0^{\pi} = \frac{E^2}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2} E^2 \quad , \end{aligned}$$

тобто: 
$$\langle E_{\tau}^2 \rangle = \frac{1}{2} E^2 \quad . \quad (2.267)$$

Помножуючи рівність (2.267) на відповідний постійний множник одержимо інтенсивність поляризованого світла  $J_0$ , що виходить з поляризатора:

$$J_0 = \frac{1}{2} J_{np} \quad . \quad (2.268)$$

де  $J_{np}$  - інтенсивність природного світла, яке падає на поляризатор.

### 2.13. Закон Малюса.

Розглянемо проходження природного світла через два поляризатори. Поляризатор, який стоїть другим на шляху променів світла називають аналізатором.

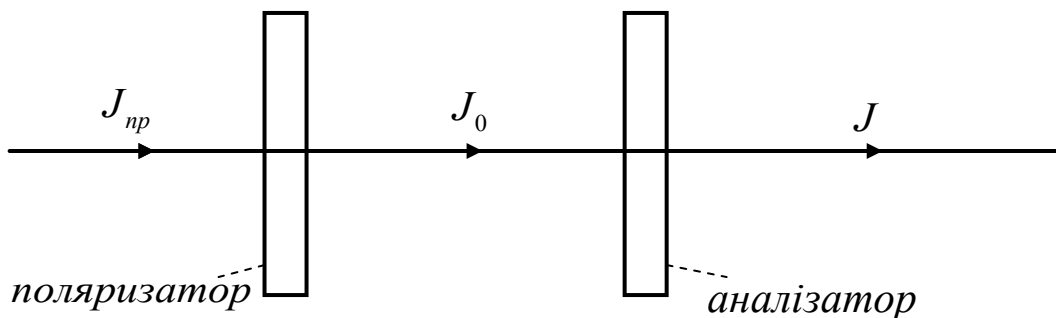


Рис.70.

Після проходження поляризатора інтенсивність світла зменшується рівно наполовину, і світло стає поляризованим. Вектор напруженості поляризованого світла  $\vec{E}_0$  можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові: складову паралельну до напрямку поляризації аналізатора, яку позначимо через  $\vec{E}_{0\tau}$ , і складову перпендикулярну до напрямку поляризації аналізатора, яку позначимо через  $\vec{E}_{0n}$ . Позначимо кут між напрямками поляризації поляризатора і аналізатора через  $\varphi$ .

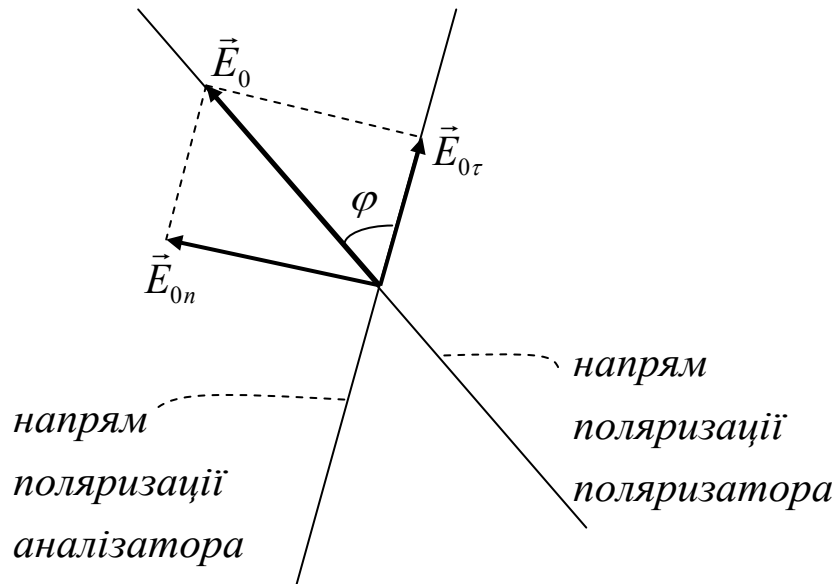


Рис.71.

Поляризатор пропустить тільки складову напруженості електричного поля, паралельну до напрямку поляризації аналізатора, що дорівнює:

$$E_{0\tau} = E_0 \cos \varphi \quad . \quad (2.269)$$

Підводячи рівність (2.269) до квадрату одержимо:

$$E_{0\tau}^2 = E_0^2 \cos^2 \varphi \quad . \quad (2.270)$$

Помножуючи рівність (2.270) на відповідний постійний множник одержимо інтенсивність поляризованого світла  $J$ , що виходить з аналізатора:

$$J = J_0 \cos^2 \varphi \quad . \quad (2.271)$$

Одержаний вираз (2.271) називають **законом Малюса**.

Окрім плоскополяризованого і природного світла існує ще частково-поляризоване світло. Його можна розглядати як суміш природного і плоскополяризованого світла.

## 2.14. Явище подвійного променезаломлення.



Майже всі прозорі кристали оптично анізотропні. Наслідком цього є явище, яке назвали подвійним променезаломленням. Полягає воно в наступному: падаючий на кристал промінь світла заломлюється і розділяється всередині кристалу на два промені, які поширюються в різних напрямках і з різними швидкостями.

Один з заломлених променів підпорядковується звичайному закону заломлення, його називають звичайним променем і біля відповідних йому величин ставлять індекс  $o$ .

Другий промінь не підпорядковується закону заломлення світла, навіть при нормальному падінні світла може відхилитись від нормалі, його називають незвичайним променем і біля відповідних йому величин ставлять індекс  $e$ .

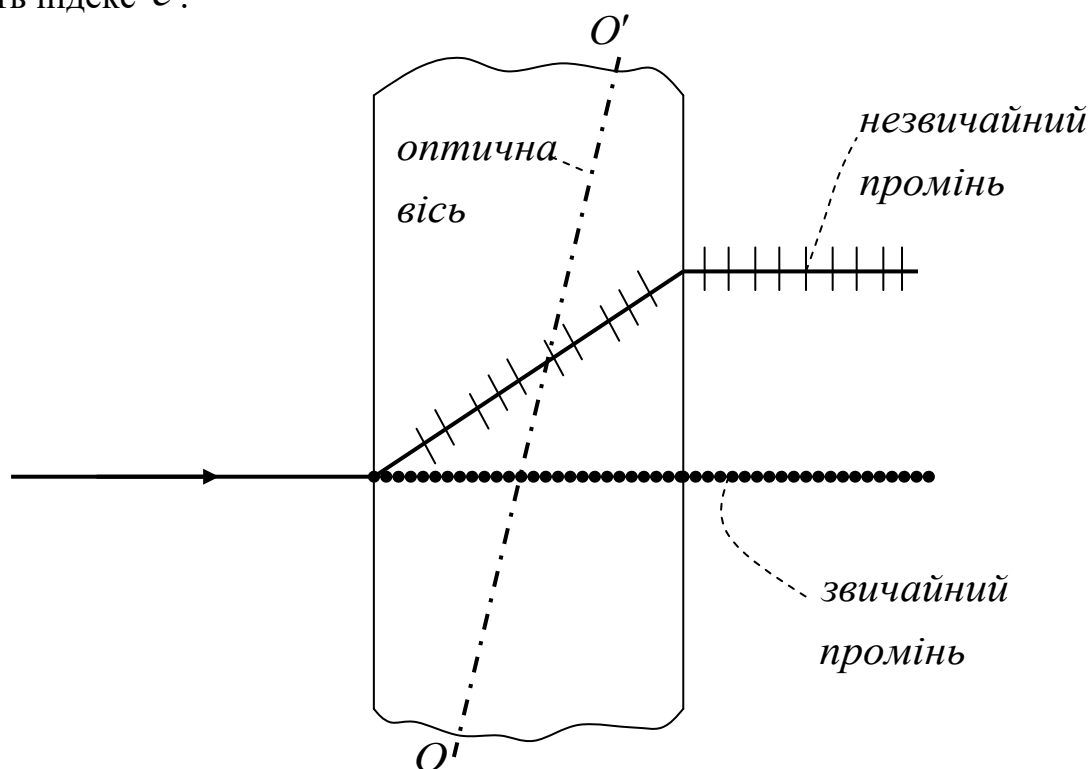


Рис.72.

На рисунку 72 показано розділення падаючого на кристал променя світла на звичайний та незвичайний промені.

**Оптична вісь кристалу** – це напрям у кристалі, вздовж якого звичайний і незвичайний промені світла поширюються не розділяючись, з однаковою швидкістю.

Якщо кристал має одну оптичну вісь, то його називають одноосним кристалом. Кристал може мати дві оптичні осі, тоді його називають двохосним кристалом.

**Головний переріз (головна площина) кристалу** – це будь яка площина, яка проходить через оптичну вісь кристалу.

Найчастіше, під головною площиною кристалу розуміють площину, що проходить через оптичну вісь кристалу і падаючий промінь світла.

Звичайний і незвичайний промені плоскополяризовані. Напрямок коливань вектора напруженості електричного поля у звичайному промені перпендикулярний до головної площини кристалу (на рисунку 72 це й напрям позначений крапками). Напрямок коливань вектора напруженості електричного поля у незвичайному промені паралельний до головної площини кристалу (на рисунку 72 це й напрям позначений рисочками). Таким чином, площини коливань у звичайного і незвичайного променів взаємно перпендикулярні.

Звичайний і незвичайний промені, після виходу з кристалу, відрізняються тільки напрямом поляризації. Тобто, назви звичайний і незвичайний промені мають зміст тільки всередині кристалу.

**Дихроїзм** – явище більш сильного поглинання одного з двох типів променів (звичайного чи незвичайного) всередині кристалу, ніж іншого типу променів.

Наприклад, дуже сильний дихроїзм у кристалі турмаліну. У ньому звичайний промінь практично повністю поглинається на довжині порядку 1 мм і з кристалу турмаліну виходить тільки плоскополяризований незвичайний промінь.

Явище дихроїзму використовують для виготовлення поляризаторів, які називають поляроїдами – це тонкі плівки, товщиною порядку 0,1 мм, які плоско поляризують світло, що проходить через них.

Стосовно показників заломлення для звичайного та незвичайного променів  $n_o$  і  $n_e$  можна сказати наступне: швидкість поширення звичайного променя у кристалі не залежить від напрямку падіння променя на кристал, тому  $n_o$  однаковий для всіх напрямів. Швидкість поширення незвичайного променя залежить від напрямку падіння світла на кристал, максимальна відмінність швидкості поширення незвичайного променя від швидкості поширення звичайного променя буде у напрямі, перпендикулярному до оптичної осі кристалу. Звідси випливає, що різниця між показниками заломлення  $|n_o - n_e|$  буде максимальною, якщо незвичайний промінь рухається перпендикулярно до оптичної осі.

### **2.15. Штучне подвійне променезаломлення.**

Звичайні прозорі тіла, у яких не спостерігається явище подвійного променезаломлення, при певному зовнішньому впливі на них набувають властивість подвійного променезаломлення. Є два найбільш характерні засоби отримання штучного подвійного променезаломлення.

#### 1) Наведення анізотропії при деформаціях.

При стисненні або розтягу тіло стає анізотропним, напрям деформації відіграє роль головної оптичної осі і тіло набуває властивість подвійного променезаломлення.

Найбільша різниця між показниками заломлення буде прямо пропорційна до механічної напруги всередині тіла:

$$n_o - n_e = k\sigma \quad . \quad (2.272)$$

де  $k$  - коефіцієнт пропорційності, який залежить від властивостей речовини.

2) Анізотропія, наведена електричним полем .

Набуття рідинами або аморфними тілами властивостей подвійного променезаломлення під впливом зовнішнього електричного поля – ефект Керра має велике значення для науки і техніки.

Спостерігати ефект Керра можна наступним чином: між двома схрещеними поляризаторами (поляризатори схрещені, якщо кут їх напрямками поляризації дорівнює  $90^\circ$ ) розміщують рідину в кюветі, яка знаходиться між обкладками конденсатора (це називають коміркою Керра). При створенні між обкладками конденсатора електричного поля, напрямленого під кутом  $45^\circ$  до напрямів поляризації поляризаторів середовище стає анізотропним, набуває властивостей подвійного променезаломлення, оптична вісь буде збігатись з напрямом електричного поля. Виникаюча різниця між показниками заломлення буде прямо пропорційна до квадрату напруженості електричного поля:

$$n_o - n_e = B\lambda E^2 \quad . \quad (2.273)$$

де  $\lambda$  - довжина хвилі світла, що проходить через рідину;  $B$  - постійна Керра.

При проходженні шляху  $l$  всередині комірки Керра між звичайним і незвичайним променями виникає різниця фаз, яка дорівнює:

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi(n_o - n_e)l}{\lambda} = \frac{2\pi B \cancel{\lambda} E^2 l}{\cancel{\lambda}} = 2\pi B l E^2 \quad . \quad (2.274)$$

Зміна напруженості електричного поля буде приводити до послідовних просвітлень і затемнень поля зору для світла, що проходить через систему. Це дає можливість модулювати світловий сигнал.

## 2.16. Поляризація при відбитті і заломлення.

Природне світло, що падає на границю розділу двох середовищ можна представити як суперпозицію двох плоскополяризованих хвиль з взаємно перпендикулярними площинами коливань, які назовемо  $S$  - хвиля і  $P$  - хвиля.

У  $S$  - хвилі напрям коливань вектора напруженості електричного поля паралельний до площини падіння світла.

У  $P$  - хвилі напрям коливань вектора напруженості електричного поля перпендикулярний до площини падіння світла (різниця фаз між складовими природного світла змінюється хаотично).

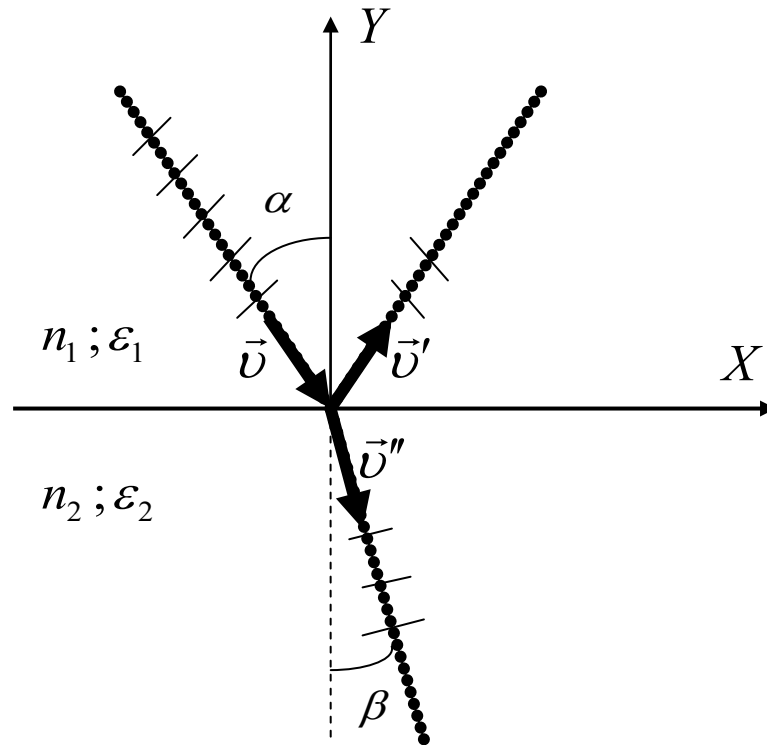


Рис. 73.

На рисунку 73 схематично зображені напрями коливань вектора напруженості електричного поля у  $S$  і  $P$  - складових природного світла: у  $S$  - хвилі напрям коливань зображений рисками, у  $P$  - хвилі напрям коливань зображений точками.

Використовуючи граничні умови для векторів напруженості електричного і магнітного поля можна знайти співвідношення між амплітудами і фазами відбитого і заломленого світла.

Позначимо напруженості електричного поля для складових падаючого, відбитого та заломленого світла через  $\vec{E}_S$ ;  $\vec{E}'_S$ ;  $\vec{E}''_S$  та  $\vec{E}_P$ ;  $\vec{E}'_P$ ;  $\vec{E}''_P$ , відповідно, а напруженості магнітного поля через  $\vec{H}_S$ ;  $\vec{H}'_S$ ;  $\vec{H}''_S$  та  $\vec{H}_P$ ;  $\vec{H}'_P$ ;  $\vec{H}''_P$ , відповідно.

Виберемо систему координат таким чином, що б границя розділу двох середовищ лежала у площині  $ZOX$  а площина падіння світла збігалась з площиною  $XOY$ , як показано на рисунку 73.

Тоді, у  $S$  - хвиль напрям коливань вектора напруженості магнітного поля буде збігатись з віссю  $Z$ ; у  $P$  - хвиль напрям коливань вектора напруженості електричного поля буде збігатись з віссю  $Z$ .

Згідно виразу (1.153) і рівності (1.194, ч. 3), складові напруженостей електричного і магнітного поля на границі розділу середовищ не змінюються.

Звідси випливає, що сума проєкцій складових, паралельних до границі, напруженостей електричного поля падаючої і відбитої хвилі повинна дорівнювати проєкції складової напруженості електричного поля, паралельної до границі, заломленої хвилі і сума проєкцій складових, паралельних до границі, напруженостей магнітного поля падаючої і відбитої хвилі те ж повинна дорівнювати проєкції складової напруженості магнітного поля, паралельної до границі, заломленої хвилі:

$$E_{Sx} + E'_{Sx} = E''_{Sx} \quad ; \quad (2.275)$$

$$H_{Sz} + H'_{Sz} = H''_{Sz} \quad ; \quad (2.276)$$

$$E_{Pz} + E'_{Pz} = E''_{Pz} \quad ; \quad (2.277)$$

$$H_{Px} + H'_{Px} = H''_{Px} \quad . \quad (2.278)$$

Проєкції швидкостей поширення падаючого, відбитого та заломленого світла, як видно з рисунку 73 дорівнюють:

$$v_x = v \sin \alpha \quad , \quad v_y = -v \cos \alpha \quad , \quad v_z = 0 \quad . \quad (2.279)$$

$$v'_x = v \sin \alpha \quad , \quad v'_y = v \cos \alpha \quad , \quad v'_z = 0 \quad . \quad (2.280)$$

$$v''_x = v'' \sin \beta \quad , \quad v''_y = -v'' \cos \beta \quad , \quad v''_z = 0 \quad . \quad (2.281)$$

Використовуючи вираз (1.279) проєкції швидкостей руху світла можна записати у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \mu_1}} \sin \alpha \\ v_y = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \mu_1}} \cos \alpha \\ v_z = 0 \end{array} \right. , \quad (2.282)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \mu_1}} \sin \alpha \\ v'_y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \mu_1}} \cos \alpha \\ v'_z = 0 \end{array} \right. , \quad (2.283)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v''_x = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \mu_0 \mu_2}} \sin \beta \\ v''_y = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \mu_0 \mu_2}} \cos \beta \\ v''_z = 0 \end{array} \right. , \quad (2.284)$$

Використовуючи формули (1.307) можна знайти зв'язок між проекціями напруженостей електричного і магнітного поля в електромагнітних хвилях.

$$\begin{aligned}
\vec{H}_P &= \varepsilon_1 \varepsilon_0 [\vec{v}; \vec{E}_P] = \varepsilon_1 \varepsilon_0 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & E_{Pz} \end{vmatrix} = \\
&= \vec{i} \varepsilon_1 \varepsilon_0 v_y E_{Pz} - \vec{j} \varepsilon_1 \varepsilon_0 v_x E_{Pz} \\
&\quad \Downarrow \\
H_{Px} &= -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \mu_1}} \cos \alpha E_{Pz} \\
&\quad \Downarrow \\
H_{Px} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0 \mu_1}} E_{Pz} \cos \alpha \quad ; \quad (2.285)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H}'_P &= \varepsilon_1 \varepsilon_0 [\vec{v}'; \vec{E}'_P] = \varepsilon_1 \varepsilon_0 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v'_x & v'_y & 0 \\ 0 & 0 & E'_{Pz} \end{vmatrix} = \\
&= \vec{i} \varepsilon_1 \varepsilon_0 v'_y E'_{Pz} - \vec{j} \varepsilon_1 \varepsilon_0 v'_x E'_{Pz} \\
&\quad \Downarrow \\
H'_{Px} &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \mu_1}} \cos \alpha E'_{Pz} \\
&\quad \Downarrow \\
H'_{Px} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0 \mu_1}} E'_{Pz} \cos \alpha \quad ; \quad (2.286)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H}_P'' &= \varepsilon_2 \varepsilon_0 \left[ \vec{v}''; \vec{E}_P'' \right] = \varepsilon_2 \varepsilon_0 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x'' & v_y'' & 0 \\ 0 & 0 & E_{Pz}'' \end{vmatrix} = \\
&= \vec{i} \varepsilon_2 \varepsilon_0 v_y'' E_{Pz}'' - \vec{j} \varepsilon_2 \varepsilon_0 v_x'' E_{Pz}'' \\
&\quad \Downarrow \\
H_{Px}'' &= -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \mu_0 \mu_2}} E_{Pz}'' \cos \beta \\
&\quad \Downarrow \\
H_{Px}'' &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\mu_0 \mu_2}} E_{Pz}'' \cos \beta \quad ; \quad (2.287)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}_S &= -\mu_1 \mu_0 \left[ \vec{v}; \vec{H}_S \right] = -\mu_1 \mu_0 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & H_{Sz} \end{vmatrix} = \\
&= -\vec{i} \mu_1 \mu_0 v_y H_{Sz} + \vec{j} \mu_1 \mu_0 v_x H_{Sz} \\
&\quad \Downarrow \\
E_{Sx} &= \frac{\mu_0 \mu_1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \mu_0 \mu_1}} \cos \alpha H_{Sz} \\
&\quad \Downarrow \\
E_{Sx} &= \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}} H_{Sz} \cos \alpha \quad ; \quad (2.288)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\vec{E}'_S &= -\mu_1\mu_0 \left[ \vec{v}' ; \vec{H}'_S \right] = -\mu_1\mu_0 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v'_x & v'_y & 0 \\ 0 & 0 & H'_{Sz} \end{vmatrix} = \\
&= -\vec{i} \mu_1\mu_0 v'_y H'_{Sz} + \vec{j} \mu_1\mu_0 v'_x H'_{Sz} \\
&\Downarrow \\
E'_{Sx} &= -\frac{\mu_0\mu_1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1\mu_0\mu_1}} \cos \alpha H'_{Sz} \\
&\Downarrow \\
E'_{Sx} &= -\sqrt{\frac{\mu_0\mu_1}{\varepsilon_0\varepsilon_1}} H'_{Sz} \cos \alpha \quad ; \quad (2.289)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}''_S &= -\mu_2\mu_0 \left[ \vec{v}'' ; \vec{H}''_S \right] = -\mu_2\mu_0 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v''_x & v''_y & 0 \\ 0 & 0 & H''_{Sz} \end{vmatrix} = \\
&= -\vec{i} \mu_2\mu_0 v''_y H''_{Sz} + \vec{j} \mu_2\mu_0 v''_x H''_{Sz} \\
&\Downarrow \\
E''_{Sx} &= \frac{\mu_0\mu_2}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0\mu_2}} \cos \beta H''_{Sz} \\
&\Downarrow \\
E''_{Sx} &= \sqrt{\frac{\mu_0\mu_2}{\varepsilon_0\varepsilon_2}} H''_{Sz} \cos \beta \quad . \quad (2.290)
\end{aligned}$$

Якщо середовища 1 і 2 немагнітні, то  $\mu_1 \approx 1$ ;  $\mu_2 \approx 1$  і показники заломлення приблизно дорівнюють:  $n_1 \approx \sqrt{\varepsilon_1}$ ;  $n_2 \approx \sqrt{\varepsilon_2}$ . Тоді, зв'язки між проекціями (2.285) – (2.290) набувають вигляду:

$$H_{Px} = -n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{Pz} \cos \alpha \quad ; \quad (2.291)$$

$$H'_{Px} = n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E'_{Pz} \cos \alpha \quad ; \quad (2.292)$$

$$H''_{Px} = -n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E''_{Pz} \cos \beta \quad ; \quad (2.293)$$

$$E_{Sx} = \frac{1}{n_1} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_{Sz} \cos \alpha \quad ; \quad (2.294)$$

$$E'_{Sx} = -\frac{1}{n_1} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H'_{Sz} \cos \alpha \quad ; \quad (2.295)$$

$$E''_{Sx} = \frac{1}{n_2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H''_{Sz} \cos \beta \quad . \quad (2.296)$$

Підставляючи вирази (2.291), (2.292) і (2.293) у рівність (2.278) знаходимо:

$$\begin{aligned} -n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{Pz} \cos \alpha + n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E'_{Pz} \cos \alpha &= -n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E''_{Pz} \cos \beta \\ \Downarrow \\ -E_{Pz} \cos \alpha + E'_{Pz} \cos \alpha &= -\frac{n_2}{n_1} E''_{Pz} \cos \beta \quad ; \quad (2.297) \end{aligned}$$

Замінюючи у виразі (2.297) відношення показників заломлення на відношення синусів кутів падіння і заломлення світла  $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  маємо:

$$-E_{Pz} \cos \alpha + E'_{Pz} \cos \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} E''_{Pz} \cos \beta$$

⇓

$$-E_{Pz} \cos \alpha \sin \beta + E'_{Pz} \cos \alpha \sin \beta = -E''_{Pz} \sin \alpha \cos \beta \quad (2.298)$$

Розв'язуючи систему з рівнянь (2.277) і (2.298) знаходимо:

$$\begin{cases} -E_{Pz} \cos \alpha \sin \beta + E'_{Pz} \cos \alpha \sin \beta = -E''_{Pz} \sin \alpha \cos \beta \\ E_{Pz} + E'_{Pz} = E''_{Pz} \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} -\cos \alpha \sin \beta + \frac{E'_{Pz}}{E_{Pz}} \cos \alpha \sin \beta = -\frac{E''_{Pz}}{E_{Pz}} \sin \alpha \cos \beta \\ 1 + \frac{E'_{Pz}}{E_{Pz}} = \frac{E''_{Pz}}{E_{Pz}} \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} \frac{E'_{Pz}}{E_{Pz}} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ \frac{E''_{Pz}}{E_{Pz}} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \end{cases} \quad (2.299)$$

Підставляючи вирази (2.294), (2.295) і (2.296) у рівність (2.275) знаходимо:

$$\frac{1}{n_1} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{Sz} \cos \alpha - \frac{1}{n_1} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H'_{Sz} \cos \alpha = \frac{1}{n_2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H''_{Sz} \cos \beta$$

⇓

$$H_{Sz} \cos \alpha - H'_{Sz} \cos \alpha = \frac{n_1}{n_2} H''_{Pz} \cos \beta \quad ; \quad (2.300)$$

Замінюючи у виразі (2.300) відношення показників заломлення на відношення синусів кутів падіння і заломлення світла  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$  маємо:

$$H_{S_z} \cos \alpha - H'_{S_z} \cos \alpha = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} H''_{S_z} \cos \beta$$

⇓

$$H_{S_z} \sin \alpha \cos \alpha - H'_{S_z} \sin \alpha \cos \alpha = H''_{S_z} \sin \beta \cos \beta \quad (2.301)$$

Розв'язуючи систему з рівнянь (2.276) і (2.301) знаходимо:

$$\begin{cases} H_{S_z} \sin \alpha \cos \alpha - H'_{S_z} \sin \alpha \cos \alpha = H''_{S_z} \sin \beta \cos \beta \\ H_{S_z} + H'_{S_z} = H''_{S_z} \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{H'_{S_z}}{H_{S_z}} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{H''_{S_z}}{H_{S_z}} \sin \beta \cos \beta \\ 1 + \frac{H'_{S_z}}{H_{S_z}} = \frac{H''_{S_z}}{H_{S_z}} \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} \frac{H'_{S_z}}{H_{S_z}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \\ \frac{H''_{S_z}}{H_{S_z}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \end{cases} \quad (2.302)$$

Отримані залежності між проекціями напруженостей (2.299) та (2.302) називають формулами Френеля.

Фазові множники в рівняннях падаючої, відбитої та заломленої хвилі однакові. Тому, формули Френеля визначають відношення амплітуд відбитої і заломленої хвилі до амплітуди падаючої хвилі.

Оскільки відношення квадратів амплітуд дорівнює відношенню інтенсивностей світла, то з формул Френеля випливають значення коефіцієнтів відбиття для складових природного світла  $S$  - хвилі і  $P$  - хвилі:

$$\rho_P = \frac{(E'_P)^2}{E_P^2} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} ; \quad (2.303)$$

$$\rho_S = \frac{(H'_S)^2}{H_S^2} = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} . \quad (2.304)$$

**Кут Брюстера** – це кут падіння, при якому відбите світло повністю поляризоване. Площина коливань поляризованого відбитого світла перпендикулярна до площини падіння.

Співвідношення між кутом падіння Брюстера і кутом заломлення, відповідним куту Брюстера, випливає з формули (2.304). Якщо сума кутів падіння і заломлення буде дорівнювати  $90^\circ$  :

$$\alpha_B + \beta_B = 90^\circ , \quad (2.305)$$

то знаменник у формулі прямує до безмежності а коефіцієнт відбиття складової світла, паралельної до площини падіння буде прямувати до нуля.

Тоді, при куті падіння Брюстера, буде відбиватись тільки  $P$  - хвиля, площина коливань у якої перпендикулярна до площини падіння.

Значення кута Брюстера можна знайти з закону заломлення світла:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta_B} &= \frac{n_2}{n_1} \\ &\Downarrow \\ \frac{\sin \alpha_B}{\sin(90^\circ - \alpha_B)} &= \frac{n_2}{n_1} \\ &\Downarrow \\ \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} &= \frac{n_2}{n_1} \\ &\Downarrow \\ \operatorname{tg} \alpha_B &= \frac{n_2}{n_1} . \end{aligned} \quad (2.306)$$

## 2.17. Взаємодія світла з речовиною.

**Дисперсія світла** – це явища, обумовлені показника заломлення середовища від довжини хвилі (або частоти):

$$n = f(\lambda) \quad . \quad (2.307)$$

Похідну від показника заломлення називають **дисперсією речовини**:

$$\frac{dn}{d\lambda} \quad . \quad (2.308)$$

Для прозорих безкольорових речовин якісний залежності показника заломлення від довжини хвилі світла у видимій частині спектру показано на рисунку 74.

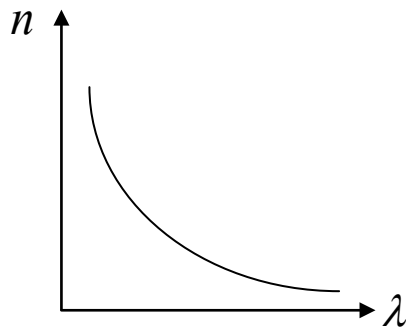


Рис. 74.

Дисперсію світла можна пояснити на основі електромагнітної теорії та електронної теорії речовини.

Квадрат показника заломлення ізотропного немагнітного середовища, як впливає з рівнянь Максвела, приблизно дорівнює діелектричній проникливості середовища:

$$n^2 = \varepsilon \quad . \quad (2.309)$$

Діелектрична проникливість середовища, в свою чергу, дорівнює:

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad , \quad (2.310)$$

де  $\chi$  - діелектрична сприйнятливість середовища, яка є коефіцієнтом пропорційності між вектором поляризації середовища і напруженістю електричного поля всередині речовини:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} \quad . \quad (2.311)$$

Якщо вибрати напрям осі координат  $X$  вздовж напрямку векторів  $\vec{P}$ ,  $\vec{E}$  і спроектувати вектори на вісь координат  $X$ , то:

$$P_x = \chi \varepsilon_0 E_x \quad . \quad (2.312)$$

З формули (2.312) випливає, що діелектрична сприйнятливість середовища дорівнює:

$$\chi = \frac{P_x}{\varepsilon_0 E_x} \quad . \quad (2.313)$$

Підставляючи діелектричну сприйнятливість у формулу (2.310) знаходимо квадрат показника заломлення середовища у вигляді:

$$\varepsilon = 1 + \frac{P_x}{\varepsilon_0 E_x} \Rightarrow n^2 = 1 + \frac{P_x}{\varepsilon_0 E_x} \quad . \quad (2.314)$$

Проекція вектора поляризації, згідно визначенню, дорівнює добутку концентрації електричних дипольних моментів  $n_0$  на проекцію одного електричного дипольного моменту частинки  $p_x$ :

$$P_x = n_0 p_x \quad . \quad (2.315)$$

проекція електричного дипольного моменту однієї частинки дорівнює добутку заряду ядра  $q$  на проекцію вектора  $\vec{l}$ , проведеного з центру електронної хмари до ядра, яка дорівнює координаті центру електронної хмари з протилежним знаком:  $l_x = -x$ , тобто:  $p_x = -qx$ .  
Тоді:

$$P_x = n_0 (-qx) \quad . \quad (2.316)$$

Підставляючи (2.316) у вираз (2.314) маємо:

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 (-qx)}{\varepsilon_0 E_x} \quad . \quad (2.317)$$

Проекція напруженості змінного електричного поля у хвилі залежить від часу наступним чином:

$$E_x = E_m \cos \omega t \quad . \quad (2.318)$$

Електронна хмара буде коливатись біля ядра під дією сили з боку змінного електричного поля, яка дорівнює:

$$-qE_x = -qE_m \cos \omega t$$

(знак мінус відповідає від'ємному знаку заряду електронної хмари).

$\omega$  - це циклічна частота електромагнітної хвилі.

Позначимо через  $m$  - масу електронної хмари, через  $k$  - коефіцієнт квазіупругої сили, що діє на електронну хмару і запишемо другий закон Ньютона для електронної хмари:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - qE_m \cos \omega t \quad . \quad (2.319)$$

Розділивши рівняння (2.319) на масу і запровадивши позначення:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad (2.320)$$

маємо:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\frac{qE_m}{m} \cos \omega t \quad . \quad (2.321)$$

Величина  $\omega_0$  - це циклічна частота власних коливань електронної хмари біля ядра.

Частинний розв'язок диференціального рівняння (2.321) будемо шукати у вигляді:

$$x = A \cos \omega t \quad , \quad (2.322)$$

де  $A$  - невизначена постійна. Підставляючи (2.322) у рівняння (2.321) знаходимо:

$$-A\omega^2 \cos \omega t + A\omega_0^2 \cos \omega t = -\frac{qE_m}{m} \cos \omega t$$

⇓

$$A = \frac{\frac{qE_m}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad . \quad (2.323)$$



Підставляючи знайдену постійну у (2.322) знаходимо залежність координати електронної хмари від часу:

$$x = \frac{\left( -\frac{qE_m}{m} \right) \cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} . \quad (2.324)$$

Враховуючи вирази (2.318) і (2.324) знаходимо з рівності (2.317) залежність квадрату показника заломлення від циклічної частоти електромагнітної хвилі:

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 (-q) \left( -\frac{qE_m}{m} \right) \cos \omega t}{\varepsilon_0 E_m (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t} = 1 + \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} ,$$

тобто:

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} . \quad (2.325)$$

## 2.18. Хвильовий пакет. Групова швидкість.

Строго монохроматичних хвиль у природі не існує. Будь яка реальна хвиля є суперпозицією монохроматичних хвиль з різними амплітудами і близькими частотами в деякому інтервалі  $\Delta\omega$ . Таку суперпозицію монохроматичних хвиль називають хвильовим пакетом.

Якщо дисперсія речовини невелика, то розпливання з часом хвильового пакету відбувається повільно. У цьому випадку хвильовому пакету можна приписати швидкість поширення його центру  $u$ , яка дорівнює:

$$u = \frac{d\omega}{dk} . \quad (2.326)$$

Циклічна частота коливань і модуль хвильового вектора за визначенням дорівнюють:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} , \text{ оскільки } T = \frac{\lambda}{c} , \text{ то: } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} . \quad (2.327)$$

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda} . \quad (2.328)$$

Диференціали від циклічної частоти і модуля хвильового вектора будуть такими:

$$d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda, \quad (2.329)$$

$$dk = \frac{2\pi dn}{\lambda} - \frac{2\pi nd\lambda}{\lambda^2} = \frac{2\pi}{\lambda^2} (\lambda dn - nd\lambda). \quad (2.330)$$

Тоді, групова швидкість буде дорівнювати відношенню диференціалів (2.329) та (2.330):

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{-\frac{2\pi cd\lambda}{\lambda^2}}{\frac{2\pi}{\lambda^2} (\lambda dn - nd\lambda)} = \frac{cd\lambda}{nd\lambda - \lambda dn} = \frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}}$$

тобто:

$$u = \frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}}. \quad (2.331)$$

Якщо  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ , то дисперсія речовини нормальна, групова швидкість менша за фазову швидкість хвилі.

Якщо  $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ , то дисперсію речовини називають аномальною, оскільки у цьому випадку групова швидкість більша за фазову швидкість хвилі.

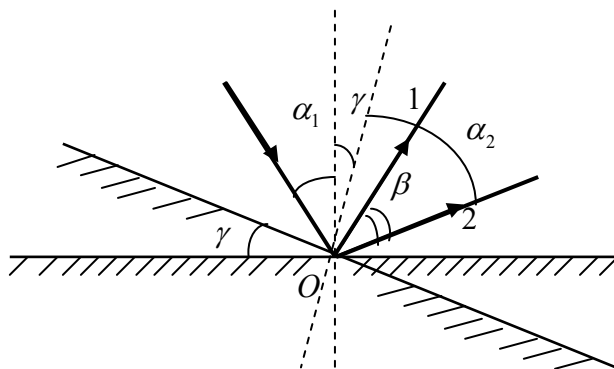
Явище дисперсії світла використовують у фізичних приладах для спектрального аналізу випромінювання речовини.

## Приклади розв'язку задач з теми «Геометрична і хвильова оптика»

**Задача 2.1.** Плоске дзеркало повертають на кут  $\gamma = 25^\circ$ . На який кут  $\beta$  відхилиться відбитий від дзеркала промінь?

Дано:  
 $\gamma = 25^\circ$   
 $\beta - ?$

Розв'язок



На рисунку кут падіння променя світла до повороту дзеркала позначений через  $\alpha_1$ . Кут падіння променя після повороту дзеркала позначений через  $\alpha_2$ . Кут падіння променя збільшується на кут  $\gamma$ , оскільки перпендикуляр до поверхні дзеркала повертається на такий само кут, як і дзеркало, тобто:  $\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma$ .

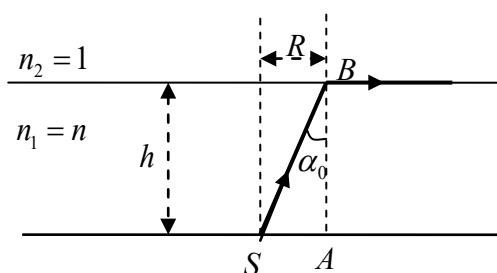
Окрім цього, з рисунку видно, що  $\beta + \alpha_1 = \alpha_2 + \gamma$ . Використовуючи зв'язок між кутами падіння знаходимо:

$$\beta + \cancel{\alpha_1} = \cancel{\alpha_1} + \gamma + \gamma \Rightarrow \beta = 2\gamma = 50^\circ.$$

**Задача 2.2.** У дно басейну завглибшки 3 м вмонтовано маленьку лампочку. Поверхня води спокійна. Яким є радіус світлого кола на поверхні басейну? Показник заломлення води  $4/3$ .

Дано:  
 $n = 4/3$   
 $h = 3 \text{ м}$   
 $R - ?$

Розв'язок



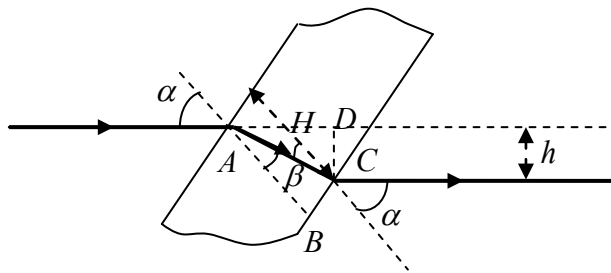
Світла пляма на поверхні води є наслідком явища повного внутрішнього відбиття. З трикутника  $SAB$  заходимо:  $R = htg\alpha_0$ . Тангенс граничного кута повного внутрішнього відбиття знаходимо, скориставшись виразом (9):

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n} \Rightarrow tg\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}. \text{ Тоді, } R = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 3,4 \text{ м}.$$

**Задача 2.3.** Горизонтальний промінь падає під кутом у  $60^\circ$  на плоско-паралельну скляну пластинку товщиною 5 см. Визначити вертикальне зміщення променя при його виході з пластинки.

### Розв'язок

Дано:  
 $\alpha = 60^\circ$   
 $n = 1,5$   
 $H = 0,05 \text{ м}$   
 $h = ?$



З трикутників прямокутних трикутників  $ABC$  і  $ACD$  знаходимо:

$$\begin{cases} AC = \frac{h}{\sin(\alpha - \beta)} \\ AC = \frac{H}{\cos \beta} \end{cases} \Rightarrow h = \frac{H \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \Rightarrow h = H (\sin \alpha - \cos \alpha \cdot tg \beta).$$

Тангенс кута заломлення можна знайти, використовуючи закон заломлення

світла у вигляді (5):  $tg \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$ , тому:

$$h = H \sin \alpha \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \approx 0,026 \text{ м}.$$

Відповідь:  $h = 0,026 \text{ м}$

**Задача 2.4.** Предмет знаходиться між лінзою та її фокусом. Відстань між зображенням предмету і лінзою дорівнює 30 см, при цьому відношення висоти зображення до висоти предмета дорівнює 0,4. Яку оптичну силу має лінза?

Дано:

$$\begin{array}{l} f = 0,3 \text{ м} \\ \Gamma = 0,4 \end{array}$$

Розв'язок

Якщо предмет знаходиться між фокусом і лінзою і зображення його зменшене, то лінза розсіювальна.  
 $D$  – Використовуючи формулу тонкої лінзи, вираз для збільшення лінзи та визначення оптичної сили лінзи знаходимо:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} \\ \Gamma = \frac{f}{d} \\ D = -\frac{1}{F} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{f}{F} = \frac{f}{d} - 1 \\ \Gamma = \frac{f}{d} \\ D = -\frac{1}{F} \end{array} \right. \Rightarrow D = \frac{\Gamma - 1}{f} = -2 \text{ дптр}.$$

Відповідь:  $D = -2 \text{ дптр}$

**Задача 2.5.** Збірна лінза дає дійсне, збільшене в 3 рази, зображення предмета. Визначити фокусну відстань лінзи, якщо відстань між лінзою і зображенням предмета  $f=48$  см.

Дано:

$$\begin{array}{l} f = 0,48 \text{ м} \\ \Gamma = 3 \end{array}$$

Розв'язок

Якщо зображення предмету дійсне, то лінза збиральна.  
 Використовуючи формулу тонкої лінзи (2) і вираз для збільшення лінзи (3) знаходимо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \\ \Gamma = \frac{f}{d} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{f}{F} = \frac{f}{d} + 1 \\ \Gamma = \frac{f}{d} \end{array} \right. \Rightarrow F = \frac{f}{\Gamma + 1} = 0,12 \text{ м}.$$

Відповідь:  $F = 0,12 \text{ м}$

**Задача 2.6.** Фокусна відстань лінзи дорівнює 15 см. Зображення предмета віддалене від лінзи на 10 см. На якій відстані від лінзи розташований предмет?

Дано:  
 $f = 0,1\text{ м}$   
 $F = 0,15\text{ м}$   


---

 $d = ?$

Розв'язок

Якщо відстань між зображенням і предметом менша за фокусну відстань а предмет дійсний, то лінза розсіювальна. Використовуючи формулу тонкої лінзи (2) знаходимо:

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} \Rightarrow d = \frac{Ff}{F - f} = 0,3\text{ м}.$$

Відповідь:  $d = 0,3\text{ м}$

**Задача 2.7.** Учень читає книгу, тримаючи її на відстані  $d = 20$  см від очей. Якою повинна бути оптична сила окулярів, щоб читати книгу, тримаючи її на відстані найкращого зору  $L = 25$  см?

Дано:  
 $d = 0,2\text{ м}$   
 $L = 0,25\text{ м}$   


---

 $D = ?$

Розв'язок

Позначимо оптичну силу ока через  $D_0$ , відстань між кришталиком і сітчаткою ока через  $f$ . Записуючи формулу тонкої лінзи для ока без окулярів і формулу тонкої лінзи для оптичної системи окуляри-лінза (враховуючи, що оптична сила системи дорівнює сумі оптичних сил ока і окулярів), одержимо:

$$\begin{cases} D_0 = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \\ D + D_0 = \frac{1}{L} + \frac{1}{f} \end{cases} \Rightarrow D = \frac{1}{L} - \frac{1}{d} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,2} = -1\text{ дптр}$$

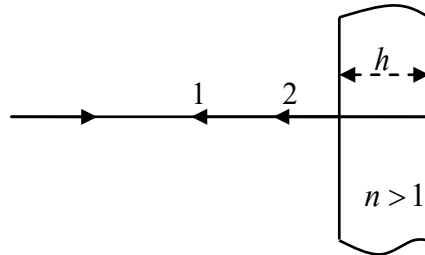
Відповідь:  $D = -1\text{ дптр}$

**Задача 2.8.** На тонку плівку з показником заломлення  $n > 1$  нормально падає біле світло. У відбитому світлі спостерігається інтерференційний максимум третього порядку для довжини хвилі 500 нм. Який порядок має інтерференційний максимум для світла з довжиною хвилі 700 нм?

Дано:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} \\ m_1 = 4 \\ \lambda_2 = 7 \cdot 10^{-7} \text{ м} \\ \hline m_2 = ? \end{array}$$

Розв'язок



Інтерференція у відбитому світлі буде спостерігатись між хвилею світла 1, що відбивається від зовнішньої поверхні плівки, і хвилею світла 2, яка відбивається від внутрішньої поверхні плівки.

При обчисленні оптичної різниці ходу між хвилями 1 і 2 потрібно врахувати, що хвиля 1 відбивається від середовища з більшим показником заломлення і стрибкоподібно змінює свою фазу на протилежну, що, згідно виразу (13), еквівалентно зменшенню оптичної різниці ходу між хвилями на  $\frac{\lambda}{2}$ .

Позначимо через  $h$  товщину плівки, тоді оптична різниця ходу між хвилями 1 і 2, як видно з рисунку, дорівнює:  $\Delta = 2nh - \frac{\lambda}{2}$ . З іншого боку, згідно умові спостереження максимуму інтенсивності світла (14), оптична різниця ходу повинна дорівнювати:  $\Delta = m\lambda$ , прирівнюючи маємо:

$$m\lambda = 2nh - \frac{\lambda}{2}.$$

Записуючи знайдену рівність для двох різних довжин хвиль знаходимо:

$$\begin{cases} m_1\lambda_1 = 2nh - \frac{\lambda_1}{2} \\ m_2\lambda_2 = 2nh - \frac{\lambda_2}{2} \end{cases} \Rightarrow m_1\lambda_1 - m_2\lambda_2 = \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{(2m_1 + 1)\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_2} = 2.$$

Відповідь:  $m_2 = 2$

## Бібліографічний список

1. *Воловик П.М.* Фізика. Підручник для університетів. – К.: Наука, 2018., 860 с.
2. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по курсу общей физики. – С-Пб.: Книжный мир, изд. 3-е, 2017., 328 с.
3. *Головка Д.Б., Ментковський Ю.Л.* Загальні основи фізики в 2-х книгах. – К.: Либідь, 2017, кн.1, 192 с.
4. *Головка Д.Б., Ментковський Ю.Л.* Загальні основи фізики в 2-х книгах. – К.: Либідь, 2016, кн.2, 224 с.
5. *Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П., Кучерук І.М., Певзнер М.Ш.* Збірник задач з загального курсу фізики. – К.: Техніка, 2018., 540.
6. *Киттель И., Найт У., Рудерман М., Рейф Ф.* Берклевский курс физики в 5-ти томах. – М.: Наука, 1971.
7. *Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П.* Загальний курс фізики в 3-х томах. – К.: Техніка, 2010., т.1, 536 с.
8. *Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П.* Загальний курс фізики в 3-х томах. – К.: Техніка, 2011., т.2, 444 с.
9. *Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П.* Загальний курс фізики в 3-х томах. – К.: Техніка, 2012., т.3, 520 с.
10. *Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Кравчук І.М., Романишин Б.М., Габа В.М., Гончар Ф.М.* Курс фізики. Фізика для інженерів. – Львів: Афіша, 2012., 376 с.
11. *Орир Д.* Фізика в 2-х томах. – М.: Мир, 1999., т.1, 320 с.
12. *Орир Д.* Фізика в 2-х томах. – М.: Мир, 1999., т.2, 288 с.
13. *Савельев И.В.* Курс общей физики в трёх томах. – М.: Наука, т.1, 2005., 432 с.
14. *Савельев И.В.* Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: Изд.-во «АСТ», 2005., 400 с.
15. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Высшая школа, изд-е 7, 2001., 544 с.
16. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Изд. центр «Академия», изд-е 11, 2010., 560 с.
17. *Трофимова Т.И., Павлова В.С.* Сборник задач по курсу физики с решениями. Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1999., 511 с.
18. *Фейнман Р.* Дюжина лекций. – М.: БИНОМ «Лаборатория знаний», 2010, 318 с.
19. *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике (для инженеров и студентов). – М.: Наука, 1977., изд-е 8, 944 с.



## Предметний покажчик

- Абсолютний показник заломлення 110
- Анабераційна поверхня 117
- Аномальна дисперсія 223
  
- Багатопроменева інтерференція 185
- Бідзеркала Френеля 174
- Біпризма Френеля 176
  
- Вектор індукції магнітного поля 6
- Взаємно спряжені точки 113
- Відносний показник заломлення 111
- Власні коливання в електричному контурі 60
  
- Густина енергії магнітного поля 56
  
- Довжина когерентності 170
- Дослід Юнга 168
  
- Електромагнітні хвилі 77
- Елемент електричного струму 9
- Енергія магнітного поля 56
- Ефект Доплера для електромагнітних хвиль 88
  
- Закон Ампера 30
- Закон Біо – Савара – Лапласа 9
- Закон електромагнітної індукції 54
- Закон заломлення і відбиття світла
- Закон повного струму 23
- Затухаючі коливання в електричному контурі 63
  
- Інтенсивність електромагнітної хвилі 87
- Інтенсивність променевого потоку 152
- Інтенсивність світлового потоку 154
- Інтерференція в тонких плівках 180
- Інтерференція хвиль 165
- Інтерферометр Фабрі – Перо 185
  
- Кандела 154
- Картезіанський овал 118
- Кільця Ньютона 178
- Когерентні хвилі 164
- Коефіцієнт самоіндукції 55

- Лінза 138
- Магнітна проникливість середовища 6
- Магнітний момент 18
- Напруженість магнітного поля 6
- Оптична різниця ходу 167
- Освітленість 155
- Параксіальні промені 126
- Поверхнева яскравість 156
- Правило Ленца 54
- Принцип найменшого часу Ферма 115
- Принцип таутохронізму 118
- Променевий потік 152
- Просвітлення оптики 182
- Резонанс в коливальному контурі 70
- Рівняння Максвелла 73
- Самоіндукція 55
- Світловий потік 153
- Світність джерела 156
- Сила Лоренца 34
- Сила світла джерела 154
- Силова лінія магнітного поля 7
- Струм зміщення 71
- Теорема Гауса для магнітного поля 51
- Фокус сходження променів 113
- Формула тонкої лінзи 141
- Центрована оптична система 124
- Циркуляція вектора напруженості магнітного поля 23
- Ширина інтерференційної смуги 170
- Ширина когерентності хвиль 172
- Явище повного внутрішнього відбиття 112
- Явище дифракції 190
- Явище дисперсії світла 210

*Навчальне видання*

*Авдонін Костянтин Вікторович  
Ковальчук Олександр Васильович*

## **ФІЗИКА**

**Частина IV. Електромагнетизм.  
Геометрична і хвильова оптика**

Навчальний посібник

Редактор К. В. Авдонін

Підп. до друку 15.12.2021 р. Формат 60x84 1/16.  
Ум. друк. арк. 13,48. Облік. вид. арк. 10,54. Наклад 15 пр. Зам. 1718.

Видавець і виготовлювач Київський національний університет технологій та дизайну.  
вул. Немировича-Данченка, 2, м. Київ-11, 01011.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,  
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 993 від 24.07.2002.