УДК 677.025.3

РЕКУРСИВНІ ФУНКЦІЇ У ЗАДАЧАХ АПРОКСИМАЦІЇ ЗНАЧЕНЬ БАГАТОВИМІРНИХ ТАБЛИЦЬ

Ю.М. ПИЛИПЕНКО

Київський національний університет технологій та дизайну

Розглядаються способи апроксимації проміжних значень багатовимірних таблиць та методи їхньої реалізації у вигляді комп'ютерних програм

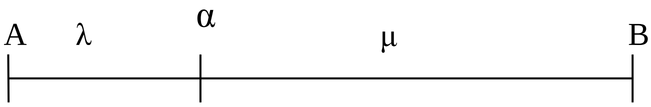
Постановка завдання

При дослідженні функцій, що залежать від багатьох параметрів, часто виникають ситуації, коли невідома аналітична залежність функції від цих параметрів. У цьому випадку експериментатор задає конкретні значення параметрів і отримує значення функції на кожному із відповідних наборів аргументів, тобто функція табулюється на багатовимірному просторі, а результатом є набір значень у вузлових точках багатовимірної таблиці. При цьому, зрозуміло, значення у не вузлових точках функції невідомі і, якщо вони потрібні у дослідженнях чи розрахунках, то знаходяться наближені значення по значенням у вузлових точках. Наприклад, на міцність нового матеріалу впливають домішки різноманітних компонент, яких може бути багато, і підрахувати значення функції у не вузлових точках під час досліджень може бути непросто. За перше наближення функції у невідомій точці, якщо нема підстав вважати, що функція має певний вигляд, береться лінійна апроксимація. Але і вона може бути зроблена по різному, наприклад, в регресійному аналізі чи сплайн-апроксимації.

У випадку функції однієї змінної задача розв'язується досить просто. Спробуємо знайти формулу, яка буде задавати наближене значення невідомої функції в залежності від розташування точки в клітині багатовимірної таблиці та описати алгоритм підрахунку відповідного значення.

Результати та їх обговорення

Нехай відрізок $[A_1,A_2]$ ділиться точкою α у відношенні: $\lambda : \mu$ ($\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$)



Якщо ми маємо справу з лінійною апроксимацією функції *f(x)* на відрізку $[A_1,A_2]$, то неважко бачити, що $f(\alpha) = \lambda\, f(A_2) + \mu\, f(A_1)$

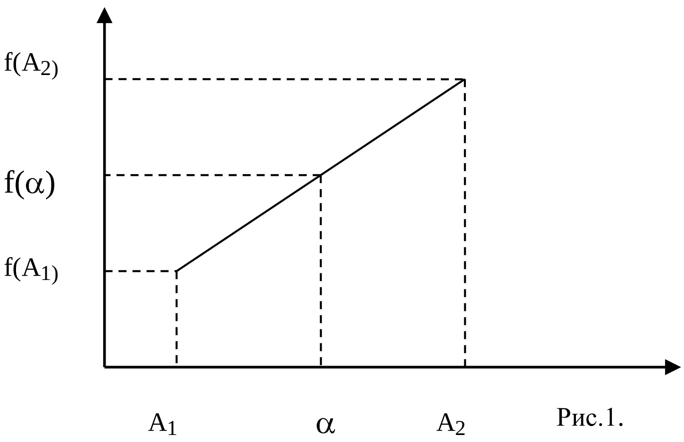


Рис.1.

Для точки A_1 значення λ будемо називати *прилеглою частиною пропорції*, а μ – *протилежною частиною пропорції* $\lambda : \mu$, в якій відрізок $[A_1, A_2]$ ділиться точкою α. Зрозуміло, що для точки A_2 прилегла частина це число μ, а протилежна це число λ. По суті маємо одновимірний лінійний сплайн [1,2].

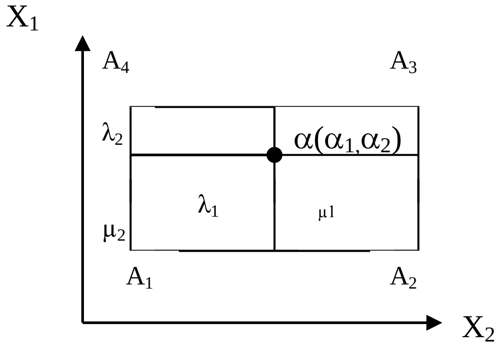


Рис.2

Якщо розглянути двовимірний випадок при послідовній лінійній апроксимації спочатку по одній координаті, а потім по іншій, отримаємо (див. рис 2)

$$f(\alpha) = \lambda_2 \mu_1 f(A_1) + \lambda_1 \lambda_2 f(A_2) + \lambda_1 \mu_2 f(A_3) + \mu_1 \mu_2 f(A_4)$$

Зауважимо, що коефіцієнти при $f(A_i)$ – це протилежні частини відповідних пропорцій $\lambda_k : \mu_k$ для точки Ai.

Зрозуміло, що отриманий результат не залежить від того, по якій координаті ввести перше, а потім друге наближення.

В цій роботі послідовну лінійну апроксимацію по кожній координаті будемо називати *лінійною апроксимацією* функції.

<u>Теорема.</u> Нехай α $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ точка багатовимірного Евклідового простору, що належить *n*- вимірному паралелепіпеду $A_1, \ldots, A_{2^n}$, ребра якого паралельні базисним векторам, причому для кожної вершини A_t по одній з координат виконується співвідношення

(1) $| A_{tk}, \alpha_k | : | \alpha_k, A_{sk} | = \lambda_k : \mu_k$,

де A_s – вершина сусідня до A_t, а значення A_{tk}, A_{sk}, α_k – *k*-ті координати відповідно точок A_t, $A_{s\alpha}$, α ($\lambda_k \geq 0$, $\mu_k \geq 0$, $\lambda_k + \mu_k = 1$). Тоді при лінійній апроксимації функції *f(x)* в точці α маємо

$$(2) \quad f(\alpha) = \sum_{i=1}^{2^n} \delta_{i1} \ldots \delta_{in} f(A_i)$$

де δ_{ik} – протилежна частина пропорції $\lambda_k : \mu_k$ для точки A_i по k тій координаті для точок сусідніх до A_i.

<u>Зауваження 1.</u> Звертаємо увагу, що оскільки ребра паралелепіпеда паралельні базисним векторам, то сусідні точки розрізняються тільки по одній координаті, саме для якої вказано співвідношення (2). Для інших координат сусідніх вершин співвідношення (2) не існує.

Зауваження 2. Хочемо відзначити, що паралелограм може бути заданий у Евклідовому просторі з кількістю векторів більше ніж n, але всі інші координати однакові й не беруть участь у наших дослідах. Наприклад, якщо маємо 3-вимірний простір і розглядаємо паралелограм, що лежить у площині, що паралельна до Z, то по суті маємо справу зі звичайним паралелограмом в площині із змінними координатами вершини по X та Y, а координата по Z – одна і та сама для всіх чотирьох точок.

Доведення. Проведено доведення методом математичної індукції по кількості вимірів простору, в якому задано паралелепіпед $A_1, \ldots, A_{2^n}$

Крок 1.

При n=1 маємо $|A_1,\alpha| : |A_2,\alpha| = \lambda : \mu$ (див. рис. 1)

Очевидно, що $f(\alpha) = \mu f(A_1) + \lambda f(A_2)$

Крок 2.

Припустимо, що теорема справедлива при будь-якому k, $k<n$.

Доведемо теорему при $k=n$.

Розглянемо переріз паралелепіпеда, що проходить точку α перпендикулярно одній з осей. Перерізом також є багатовимірний паралелепіпед але з кількістю вершин, що удвічі менше ніж у вихідного паралелепіпеда, а одна із координат зафіксована (припустимо остання). Цікаво те, що оскільки ребра паралелепіпеда були паралельні направляючим вектора, то дві сусідні точки ребра відрізнялися тільки по одній координаті і при відповідному перерізі, що мали різні останні координати, зіллються в одну вершину нового паралелепіпеда в той час, як співвідношення для інших координат $\lambda_k : \mu_k$ ($k = 1, \ldots n-1$) залишається без змін.

Знайдемо значення нашої функції в кожній із вершин нового паралелограма. Оскільки кожне ребро можна вважати одновимірним паралелепіпедом, то для нього справедливе припущення індукції, і тоді значення функції у кожній новій вершині відповідно дорівнює

$\mu_n f(A_1) + \lambda_n f(A_{1+2^{n-1}})$

…………………………

$\mu_n f(A_{2^{n-1}}) + \lambda_n f(A_{2^n})$,

якщо вважати що $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{n-1}}$ – переріз, який проходить через точку A_1 паралельно до перерізу, що проходить через точку α, а точку A_i, $A_{i+2^{n-1}}$ розташовану на ребрі, яке паралельне n-му вектору базису і відповідає n-й координаті для точок $A_i : A_{i+2^{n-1}} = \lambda_n : \mu_n$ ($i = 1, \ldots 2^{n-1}$)

Відзначимо, що для нового паралелепіпеда B_1, B_2, …, $B_{2^{n-1}}$ відношення $\lambda_1 : \mu_1, \lambda_2 : \mu_2, \ldots, \lambda_{n-1} : \mu_{n-1}$ залишаться без змін, де в якості B_i виступає точка після «склеювань» точок A_i та $A_{i+2^{n-1}}$ ($i = 1, \ldots 2^{n-1}$).

В силу припущення індукції маємо

$f(A) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \delta_{i1} \ldots \delta_{i(n-1)} f(B_i)$, змінюючи $f(B_i)$ на $\mu_n f(A_i) + \lambda_n f(A_{i+2^{n-1}})$ отримуємо потрібне співвідношення. Теорему доведено.

Теорема дає готову формулу (2) для знаходження наближеного значення функції у потрібній точці багатовимірної таблиці, якщо відомі Ії координати та значення функції у вузлових точках.

Підпрограму функцію, що буде визначати потрібне наближення, організуємо, як рекурсивну функцію, що буде посилатися на відомі значення досліджуваної функції у вузлових точках.

Структура цієї підпрограми функції наступна:

1. Визначення та запам'ятовування вузлових точок $A_1, A_2, \ldots, A_2n$ таблиці та визначення функції у вузлових точках.
2. Знаходження та запам'ятовування клітини багатовимірної таблиці, де знаходиться точка, в якій потрібно відшукати наближене значення.
3. Знаходження відношень $\lambda_k : \mu_k$, k=1,2,…,n, доданків вигляду $\delta_{i1}...\delta_{in} f(A_i)$, (i=1,2,…$2^n$) та потрібної суми (див. формулу 2).

Етап 1.

Задаємо вузлові точки по кожному виміру, наприклад, у вигляді одновимірних масивів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та значення функції в кожній точці багатовимірної таблиці. Це можна зробити по різному і ми відаємо його на самостійний розгляд користувача. Зазначимо, що після цього етапу можна звертатися до функції рекурсивно.

Зазначимо, що багатовимірна таблиця вузловими точками розбивається на багатовимірні клітини, у вершинах яких розташовані вузлові точки, кожна з координат яких приймає одне із двох значень (наприклад, кожна координата одиничного n – вимірного куба приймає значення 0 або 1).

Етап 2.

Знаходження та запам'ятовування вузлових точок однієї клітини багатовимірної таблиці, де знаходиться точка. Для цього використаємо двовимірний масив $R_{n\times n}$. Перша координата точки (R_{1k}, R_{2k}) задає менше значення, друга – більше значення по k- тій координаті вузлових вершин однієї клітини багатовимірної таблиці, в якій знаходиться потрібна точка.
Для цього організуються n циклів, що йдуть один за другим по кожній з координат, з відповідною перевіркою, чи належить k- та координата точки α (α_1, α_2, …, α_n) відповідному проміжку $[x_{ki}, x_{k(i+1)}]$. Якщо належить, то $R_{1k}= x_{ki}$, а $R_{2k}= x_{k(i+1)}$. Після обробки всіх циклів масив $R_{n\times n}$ сформовано.

Етап 3.

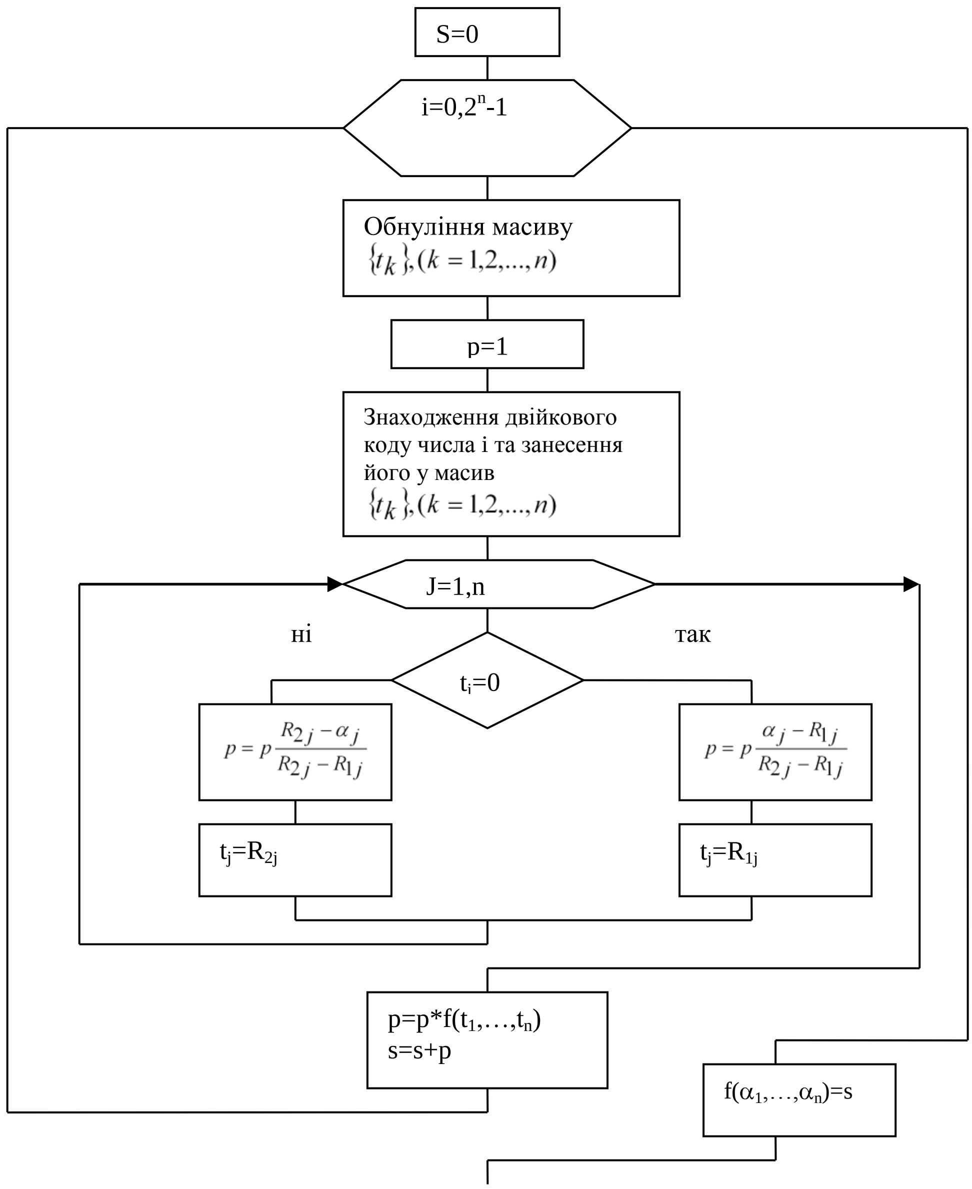
Знаходження доданку вигляду $\delta_{i1}...\delta_{in} f(A_i)$, (i=1,2,…$2^n$) , де $\delta_{i1}...\delta_{in}$ повинні пробігати по всім значенням λ_k , μ_k, k=1,2,…,n (див. формулу 2) найцікавіший. Таких доданків 2^n і для кожного з них число δ_{ik} залежить від того, яка координата проміжку $[x_k, x_k^1]$ розглядається. Якщо відрізок $[x_k, x_k^1]$ по k-тій координаті двох вузлових точок ділиться k – тою координатою точки α (α_1, α_2, …, α_n) у відношенні $\lambda_k : \mu_k$ і за вузлову точку береться точка з k – тою координатою x_k, то $\delta_{ik} = \mu_k$, якщо ж за вузлову точку береться точка з k – тою координатою x_k^1, то $\delta_{ik} = \lambda_k$. Для того, щоб розглянути всі доданки потрібного вигляду сформуємо додатковий одновимірний масив $t\{k\}, (k = 1,2,...,n)$, який буде мати два призначення:

1. Спочатку в масиві зберігається двійковий код одного числа і (i=0,1,2,…,2^n-1). Тобто кожен елемент масиву дорівнює 0 або 1, в залежності від того, яке число розглядається[3]. Так, наприклад, якщо i=0, то всі елементи масиву дорівнюють 0, якщо ж i=2^n-1, то всі елементи рівні 1.

2. Після того, як масив сформовано, його елементи трансформуються наступним чином: якщо $t_k=0$, то $t_k=x_k$ із проміжку $[x_k,x_k^1]$ і $\delta_{ik} = \mu_k$, якщо ж $t_k=1$, то $t_k=x_k^1$ і $\delta_{ik} = \lambda_k$.

Це означає, що в масиві $\{t_k\},(k=1,2,...,n)$ після перетворення знаходяться координати чергової вузлової точки, а по ходу перетворень ми знаходимо множники добутку $\delta_{i1}...\delta_{in}$.

Фрагмент блок схеми знаходження суми S всіх потрібних доданків та функції $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.



Знаходження двійкового коду числа і та занесення його у масив $\{t_k\},(k=1,2,\dots,n)$можна взяти із [3]. Користувачу залишається :

1. Визначитися із розмірністю багатовимірної таблиці
2. Задати функцію у вузлових точках
3. Записати відповідні блок схеми на потрібній мові програмування.

ЛІТЕРАТУРА.

1. С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. Сплайны в вычислительной математике // М.Наука, – 1976. –248с.
2. Д. Роджерс, Дж. Адамс. Математические основы машинной графики // М.Мир, –2001.– 403с.
3. Ю.М.Пилипенко, О.А.Лагода. Алгоритми повного перебору // Вісник КНУТД. Київ. – 2007. – с.86–93.