

УДК 677.075

## ОЦІНКА ТОЧНОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ ЕСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ПРОЦЕСУ ВОДОВБИРАННЯ ТЕКСТИЛЬНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

В.І. ВЛАСЕНКО

Київський національний університет технологій та дизайну

Доведена відповідність аналітичної апроксимації експериментальних даних процесу водовбирання. Методами теорії ймовірності та математичної статистики встановлено, що відхилення аналітичної залежності від даних експериментів не перевищує  $\pm 4\%$ , що задовольняє вимогам інженерних розрахунків

### Постановка завдання

Мета роботи – визначити точність аналітичної апроксимації експериментальних даних процесу водовбирання.

### Об'єкти та методи дослідження

Об'єкт дослідження – точність аналітичної апроксимації експериментальних даних процесу водовбирання.

Визначення відповідності експериментальних даних апроксимуючим аналітичним залежностям проводилось з використанням сучасних методів планування експерименту, теорії ймовірності та математичної статистики.

### Результати та їх обговорення

Експеримент з визначення швидкості водовбирання, описаний в [1], дає досить характерну залежність швидкості водовбирання від часу. Наприклад, для бавовняного трикотажного полотна (умовне позначення «Pq») така залежність має вид:

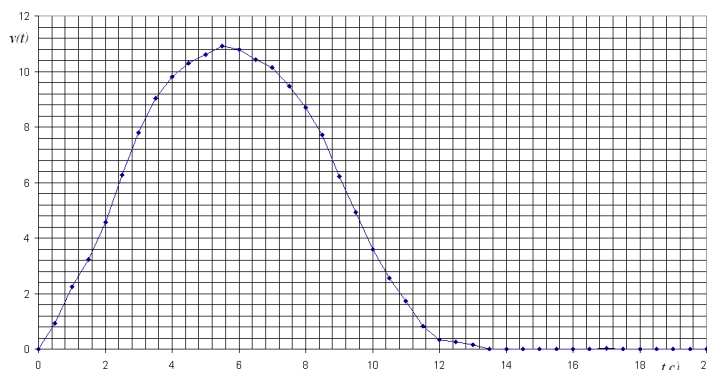


Рис. 1. Швидкість водовбирання трикотажним полотном «Pq»

В [2] була представлена аналітична нелінійна модель залежності водовбирання (питомої концентрації вологи) текстильним матеріалом та швидкості її зміни при проходженні вологи перпендикулярно площині матеріалу:

$$U(t) = \int_0^1 U(\xi, t) d\xi = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8e^{-A \xi^{i-1} t^B}}{\pi^2 \cdot (i-1)^2},$$

$$v(t) = \frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8ABt^{B-1} e^{-A \xi^{i-1} t^B}}{\pi^2 \cdot (i-1)^2},$$

де  $U$  – загальна концентрація вологи в матеріалі;  $t$  – час;  $A, B$  – константи водовбирання (безпосередньо з експерименту не визначаються);  $z$  – координата точки в матеріалі;  $v(t)$  – швидкість зміни загальної концентрації вологи в матеріалі.

Знайдені в [2] константи водовбирання при моделюванні процесів в середині матеріалу дозволили побудувати аналітичну залежність (рис. 2, суцільна крива). Візуальне порівняння двох кривих показує високу збіжність експериментальних та аналітичних даних. Проте вірогідність одержаних результатів повинна забезпечуватися використанням перевірених методів планування експерименту [3], методами теорії ймовірностей та математичної статистики [4, 5], що визначають вірогідність одержання правильного рішення на всьому інтервалі проведення експерименту. Розглянемо окремі експериментальні точки на графіку (рис. 2, 3). Для кожної точки визначимо похибку (відхилення експериментального значення від одержаного аналітичного). Розрахунок похибок для тридцяти експериментальних точок представлений в табл. 1.

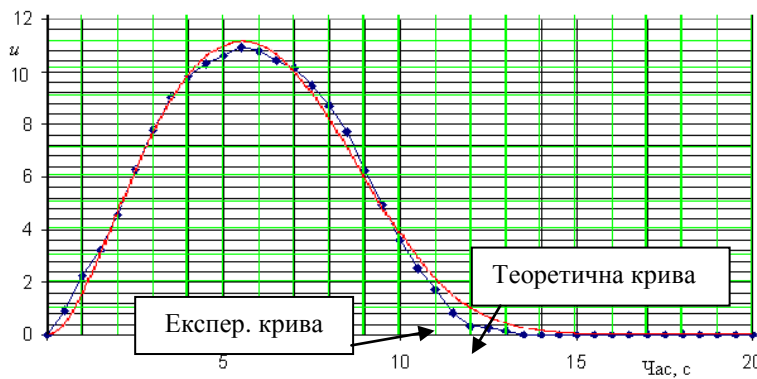


Рис. 2. Візуальне співставлення аналітичної і експериментальної залежності

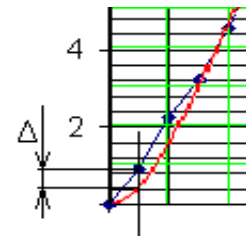


Рис. 3. Визначення похибок ( $\Delta$ ) для конкретної точки

Таблиця 1. Відхилення аналітичної залежності від експерименту для тридцяти точок (у відсотках)

0	2,1	1,2	0,2	-0,2	0,1	0,1	0,2	-0,5	-0,4
-2,2	-0,5	-1,1	0,6	2,0	2,5	1,2	1,7	-1,0	-1,2
-0,8	-1,0	-2,0	-3,1	-0,7	-1,2	-1,2	-1,0	-0,5	1,0

Знайдемо закономірність розподілення параметру і віднесемо одержані дискретні дані на всю безперервну функцію. Для побудови гістограми розподілення частот, з якими зустрічаються різні відхилення, визначимо мінімальне і максимальне відхилення. Для вибірки, яку ми розглядаємо, досліджуваний інтервал відхилень становить  $-3,1 < x < 2,5$ . Розбиваємо цей інтервал на певну кількість окремих інтервалів. Зважаючи на обмежений обсяг даних, для даного випадку беремо вісім інтервалів.

Для кожного інтервалу з даних таблиці 1 розраховуємо кількість даних, що попадають в цей інтервал –  $m_i$ . Цю кількість у кожному випадку відносимо до загальної кількості вимірювань  $N$  (у даному випадку 30) і одержуємо густину частот попадання розмірів  $p_i$  у заданий інтервал:

$$p_i = \frac{m_i}{N}$$

де  $i$  – номер інтервалу;  $N$  – загальна кількість вимірювань.

Одержані дані зводимо у табл. 2, в якій означаємо,  $x_l$  – ліва границя інтервалу,  $x_n$  – права границя інтервалу,  $x^*$  – середина інтервалу.

Таблиця 2. Експериментальна густина відхилень експерименту від теоретичної залежності

$i$	$x_l$	$x_n$	$x^*$	$m_i$	$p_i$
1	-3,1	-2,4	-2,80	1	0,033
2	-2,4	-1,7	-2,05	2	0,067
3	-1,7	-0,9	-1,30	7	0,233
4	-0,9	-0,1	-0,50	7	0,233
5	-0,1	0,7	0,30	6	0,200
6	0,7	1,4	1,05	3	0,100
7	1,4	2,2	1,80	3	0,100
8	2,2	2,5	2,35	1	0,033

На рис. 4 представлена гістограма залежності густини відхилень від їх значень (частоти попадання у заданий інтервал від значень).

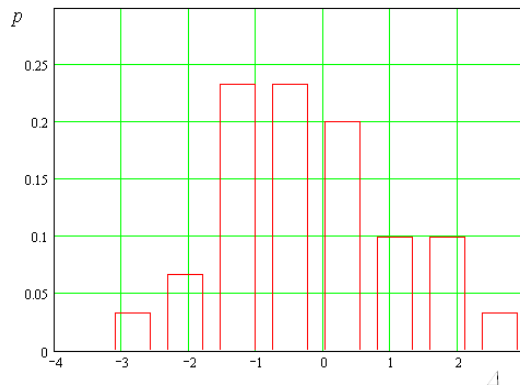


Рис. 4. Гістограма густин похибок

Після побудови гістограм за розмірними ознаками необхідно з'ясувати закон розподілення випадкової величини, тобто розмірної ознаки в інтервалі розмірів, що досліджуються. За зовнішніми ознаками одержану гістограму можна віднести до нормального розподілення.

У такому разі нормальне розподілення ймовірностей відхилення математично записується як [5]:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

де  $\mu$  – середнє значення (математичне очікування);  $\sigma$  – середньоквадратичне відхилення;  $\pi$  – число Пі.

Теоретична ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини  $x$  в інтервал  $(x_1, x_2)$  визначається як

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right) \right],$$

де  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функція Лапласа (інтеграл ймовірностей).

Якщо прийняти нормальний закон розподілення, то його характеристики можна визначити наступним чином. Математичне очікування  $\mu$  (середнє значення) знаходиться за формулою

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} \quad \text{і складає } -0,19 \%. \quad \text{Дисперсія } D \text{ розраховується за формулою}$$

$$D = \frac{\sum_{i=1}^N (\xi_i - \mu)^2}{N} = \frac{\xi_1 - \mu)^2 + (\xi_2 - \mu)^2 + (\xi_3 - \mu)^2 + \dots + (\xi_N - \mu)^2}{N}$$
 і дорівнює 1,72 %. Середньоквадратичне відхилення  $\sigma = \sqrt{D}$  і дорівнює 1,31%

Щоб упевнитись в тому, що знайдені відхилення не суперечать зробленому припущенню про нормальний закон відхилення випадкової величини, одержаної з експерименту, використаємо критерій згоди. Як критерій згоди було обрано критерій Пірсона (критерій  $\chi^2$ ). За міру розходження приймаємо величину  $\chi^2$ , експериментальне значення якої визначається виразом:

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(\xi_i - N \cdot P_i)^2}{N \cdot P_i},$$

де  $\chi^2$  – експериментальне значення критерію Персона;  $l$  – кількість розрядів, на які розбити всі дослідні значення величини відхилення;  $N$  – обсяг вибірки (кількість значень експериментів);  $m_i$  – кількість результатів, що потрапили в даний інтервал;  $P_i$  – теоретична вірогідність потрапляння випадкової величини в інтервал даного розряду, обчислена за нормальним законом розподілення.

$$P_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+1}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

де  $z_i$  – ліва границя інтервалу.

Знаходимо  $P_i$  за допомогою програми MathCAD. Дані зведені в табл. 3.

Кількість ступенів свободи  $k = l - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$ ;  $r$  – кількість параметрів закону розподілення, що оцінюється. Для нормального закону розподілення таких параметрів два – математичне очікування і середньоквадратичне відхилення.

З таблиці критичних точок розподілення  $\chi^2 = 15,1$  [6], виходячи з кількості ступенів свободи і експериментального значення  $\chi_q^2 = 1,85$ , знаходимо ймовірність того, що величина  $\chi^2$  перевищує значення  $\chi_q^2$ . Одержимо, що рівень значущості  $\alpha_q = P(\chi^2 \geq \chi_q^2) \approx 0,01$  – досить мала величина і дозволяє стверджувати, що положення про нормальне розподілення випадкових величин обґрунтоване.

Таблиця 3. Розрахунок експериментального значення критерію Персона

$i$	$x^*$	$z_i$	$P_i$	$N \cdot P_i$	$\frac{(\xi_i - N \cdot P_i)^2}{N \cdot P_i}$
		$-\infty$			
1	-2,80	-3,1	0,043	1,29	0,065
2	-2,05	-2,4	0,087	2,61	0,140
3	-1,30	-1,7	0,167	5,01	0,790
4	-0,50	-0,9	0,227	6,81	0,005
5	0,30	-0,1	0,219	6,57	0,050
6	1,05	0,7	0,150	4,50	0,500
7	1,80	1,4	0,073	2,19	0,300
8	2,35	2,2	0,033	0,99	0,000
		$+\infty$			
$\Sigma$					1,850

Доведення нормального розподілення відхилень експериментальних і теоретичних величин дозволяє використовувати випробувані методи теорії ймовірності, зокрема визначати реальні

вірогідності відхилень не просто для обмеженої кількості точок, а на всьому інтервалі проведення вимірювань. За цих умов можна розв'язувати задачі двох напрямів: визначити ймовірність потрапляння відхилень в заданий відсотковий діапазон; визначити діапазон відхилень, що з гарантованою ймовірністю забезпечує точність апроксимації.

Площа фігури  $F$ , обмежена кривою розподілення та двома вертикальними лініями, визначає питому вагу відхилень, що потрапляють в даний діапазон. Площа криволінійної фігури, як відомо, визначається інтегралом від функції з границями, що визначаються межами інтервалу

$$F = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx .$$

Якщо як границі інтегрування розглядати максимальне і мінімальне відхилення, одержане з експерименту, можна знайти вірогідність потрапляння всіх можливих відхилень в даний інтервал. Обчисливши такий інтеграл, одержимо  $F=0,967$ , тобто з гарантованою вірогідністю 96,7% відхилення теоретичного значення від експериментального не перевищать значень від  $-3,1$  до  $2,5$ .

Для впевненості в тому, що розбіжність теорії і експерименту не буде значною, запровадимо випробувані методи теорії ймовірності.

Використаємо для нормального розподілення критерій «трьох сигма», який стверджує, що ймовірність потрапляння випадкових величин в інтервал  $\mu - 3\sigma \leq \Delta \leq \mu + 3\sigma$  дорівнює

$F = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} p(x) dx = 0,997$ . Це означає, що максимальний ризик відхилень від заданого інтервалу складає 0,3%.

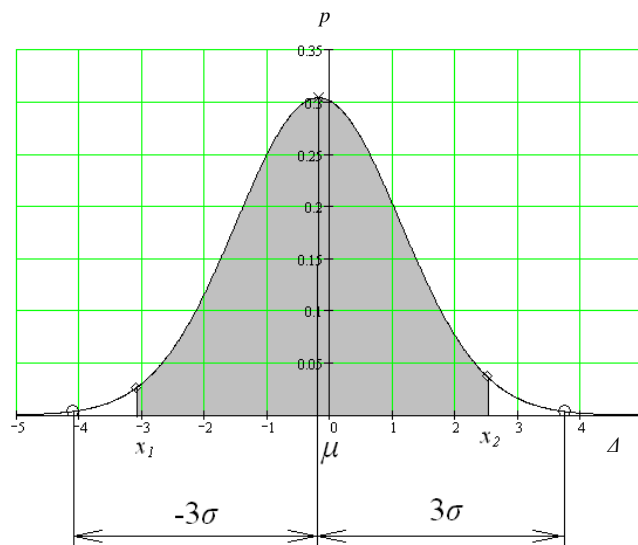


Рис. 5. Визначення інтервалу ймовірних похибок за правилом трьох сигма

Враховуючи вище приведені розрахунки, можна стверджувати, що похибки відхилення аналітичної залежності від даних експерименту знаходяться в межах:  $-4,1\% \leq \Delta \leq 3,7\%$ .

#### Висновки

Використання критерію Пірсона підтвердило гіпотезу про нормальне розподілення відхилень аналітичного виразу і експериментальних даних. Передбачуване відхилення аналітичної залежності від даних експериментів не перевищує  $-4,1\% \div +3,7\%$ , що задовольняє вимогам інженерних розрахунків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Власенко В.І. Дослідження процесу водовбирання текстильними матеріалами технічного призначення // Вісник КНУТД. – 2009. – №5. – с. 106 – 112.
2. Власенко В.І. Теоретичні дослідження процесу водовбирання текстильними матеріалами. Повідомлення 3. Методика визначення констант водовбирання текстильних матеріалів. //Вісник КНУТД. – 2010. – №2. – с. 102–108.
3. Фадеев М. А. Элементарная обработка результатов эксперимента. М.: Лань, – 2008. – 128 с.
4. Рыжов Э.В., Горленко О.А. Математические методы в технологических исследованиях. К.: Наук. думка, – 1990. – 184 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистке. М.: Высшая школа, – 1989. – 400 с.
6. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, – 1973. – 320 с.

Надійшла 27.12.2010