Український математичний вісник
Том 9 **(2012)**, № 4, 568 – 577

umb-logo2.eps

Про єдиність розв'язку крайової задачі для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами

Ольга Б. Нестеренко

(*Представлена А. М. Самойленко*)

Анотація. Встановлено умови існування єдиного розв'язку крайової задачі для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами, а також еквівалентність даної задачі та відповідного інтегрального рівняння.

2010 MSC. ???.

Ключові слова та фрази. Крайова задача, інтегро-диференціальне рівняння, єдиність розв'язку, інтегральне рівняння.

Вступ

Пристальна увага в даний час приділяється такій області теорії крайових задач, як дослідження розв'язків задач, що містять параметри або в рівнянні, або в крайових умовах. Дослідженню існування та побудові розв'язків крайових задач, коли параметр міститься в крайових умовах, присвячена стаття А. М. Самойленка, М. І. Ронто, В. А. Ронто [12].

У монографії О. А. Бойчука, В. Ф. Журавльова, А. М. Самойленка [1] висвітлено підхід до вивчення нетерових задач, до яких належать і задачі з обмеженнями.

Крайові задачі з параметрами для багаточастотної коливної системи, для коливної системи з імпульсною дією досліджувались за допомогою методу осереднення у роботах А. М. Самойленка, Р. І. Петришина, Л. М. Лакусти [8, 13], А. М. Самойленка, Я. Р. Петришина [13].

У роботах М. І. Ронто [11, 12], В. А. Ронто [12] встановлюються умови існування розв'язків крайових задач з параметрами та застосовуються до них наближені методи.

Стаття надійшла в редакцію 26.09.2012

Умови розв'язуваності сингулярних інтегральних рівнянь з параметрами та обмеженнями були розглянуті у статтіх О. Б. Поліщук [9].

У працях А. Ю. Лучки [3–5], О. І. Ковтун [2], О. Б. Поліщук [10], В. А. Ферука [5,14,15] дослідження задач з обмеженнями проводились за допомогою задач з параметрами.

В статті [7] автором були встановлені умови існування розв'язків крайової задачі для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями та обгрунтовано застосування до них ітераційного методу.

Дана стаття присвячена питанням існування і єдиності розв'язку крайової задачі для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами.

При розв'язанні цих питань використовується методика, розроблена в [3–7].

1. Постановка задачі

Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння вигляду

$$(Lx)(t) = f(t) + C(t)\lambda + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\left(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(m-1)}(s)\right) ds, \tag{1.1}$$ III3.1

і поставимо задачу знаходження такої функції $x \in W_2^m[a,b]$ та параметра $\lambda \in \mathbb{R}^l$, які задовольняють рівняння (1.1) майже скрізь, крайові умови та обмеження

$$U(x) = \gamma, \qquad \int_a^b S(t)x(t)\,dt = \alpha. \tag{1.2}$$ III3.2

Якщо така пара $(x(t), \lambda)$ існує, то задачу (1.1), (1.2) вважаємо сумісною.

В зображеннях (1.1), (1.2) вважаємо

$$(Lx)(t) = x^{(m)}(t) + p_1(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + p_m(t)x(t), \tag{1.3}$$ III3.4

$t \in [a,b]$, ε — достатньо малий невід'ємний параметр, $f \in L_2[a,b]$, $\{p_1, \ldots, p_m\} \subset L_2[a,b]$, ядро $H(t,s)$ — сумовне з квадратом за сукупністю змінних, $(1 \times l)$-матриця $C(t)$, $(l \times 1)$-матриця $S(t)$, елементи яких лінійно незалежні функції сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$, стала $(m \times 1)$-матриця U, елементи якої мають вигляд

$$U_\nu(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_{\nu i} x^{(i-1)}(a) + \beta_{\nu i} x^{(i-1)}(b) \right),$$

та $\gamma \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$ є заданими.

Вважаємо також, що оператор

$$(Fx)(t) = F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m-1)}(t))$$

відображає простір $W_2^m[a,b]$ в простір $L_2[a,b]$. Функція $F : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, яка його породжує, задовольняє умову Ліпшиця

$$|F(t, u_0, \ldots, u_{m-1}) - F(t, v_0, \ldots, v_{m-1})| \le \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i |u_i - v_i|, \tag{1.4}$$ III3.3

для будь-яких $\{u_i, v_i\} \subset \mathbb{R}$, $\tau_i \in \mathbb{R}^+$, $i = \overline{0, m-1}$.

Використовуючи методику, розроблену в [3–7], встановимо, що задача (1.1), (1.2) еквівалентна інтегральному рівнянню без обмежень. Розглянемо породжуючу задачу

$$(Ax)(t) = C(t)\lambda + y(t), \qquad U(x) = \gamma, \tag{1.5}$$ III3.6

$$\int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{1.6}$$ III3.7

де

$$(Ax)(t) = x^{(m)}(t) + c_1(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + c_m(t)x(t), \tag{1.7}$$ III3.8

задана функція $y \in L_2[a,b]$ і коефіцієнти $c_1(t), \ldots, c_m(t)$ неперервні на відрізку $[a,b]$.

В статті [7] було доведено, що у випадку, коли однорідна задача

$$(Ax)(t) = C(t)\lambda, \quad U(x) = 0, \quad \int_a^b S(t)x(t)\,dt = 0 \tag{1.8}$$ III3.9

має лише тривіальний розв'язок, існують такі вектор $\sigma \in \mathbb{R}^l$, функції $h(t)$, $G(t,s)$ та $(l \times 1)$-матриця $\Gamma(s)$, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі (1.5), (1.6) зображується формулами

$$x(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)y(s)\,ds, \quad \lambda = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)y(s)\,ds. \tag{1.9}$$ III3.10

Запишемо рівняння (1.1) у вигляді

$$\begin{aligned} x^{(m)}(t) + c_1(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + c_m(t)x(t) \\ = x^{(m)}(t) + c_1(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + c_m(t)x(t) \\ - x^{(m)}(t) - p_1(t)x^{(m-1)}(t) - \cdots - p_m(t)x(t) + f(t) + C(t)\lambda \\ + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\Big(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(m-1)}(s)\Big)\, ds. \quad (1.10) \end{aligned}$$
III3.11

Ввівши позначення

$$r_k(t) = c_k(t) - p_k(t), \quad k = \overline{1,m},$$

$$\begin{aligned} y(t) = f(t) + r_1(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + r_m(t)x(t) \\ + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\Big(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(m-1)}(s)\Big)\, ds \quad (1.11) \end{aligned}$$
III3.12

і, використавши формулу (1.7), вираз (1.10) можна записати у вигляді

$$(Ax)(t) = C(t)\lambda + y(t).$$

Отже, задача (1.1), (1.2) стала задачею (1.5), (1.6), остання з яких стосовно однорідної задачі (1.8) має єдиний розв'язок, який зображується формулами (1.9).

Підставимо перший вираз у зображеннях (1.9) у праву частину співвідношення (1.11)

$$\begin{aligned} y(t) = f(t) + r_1(t)h^{(m-1)}(t) + \cdots + r_m(t)h(t) \\ + \int_a^b \left(r_1(t)\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}G(t,s) + \cdots + r_m(t)G(t,s) \right) y(s)\, ds \\ + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\Bigg(s, h(s) + \int_a^b G(s,\xi)y(\xi)\, d\xi, \ldots \\ \ldots, h^{(m-1)}(s) + \int_a^b \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}G(s,\xi)y(\xi)\, d\xi\Bigg) ds. \quad (1.12) \end{aligned}$$
III3.13

Візьмемо до уваги, що

$$(Ax)(t) - (Lx)(t) = (Bx)(t) = r_1(t)h^{(m-1)}(t) + \cdots + r_m(t)x(t) \quad (1.13)$$
III3.14

і позначимо через

$$K(t,s) = (BG)(t,s) = r_1(t)\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}G(t,s) + \cdots + r_m(t)G(t,s), \tag{1.14}$$ III3.15

$$g(t) = f(t) + (Bh)(t) = f(t) + r_1(t)h^{(m-1)}(t) + \cdots + r_m(t)h(t).$$

Тепер інтегральне рівняння (1.12) набуває вигляду

$$\begin{aligned} y(t) = g(t) + \int\limits_a^b K(t,s)y(s)\,ds \\ + \varepsilon \int\limits_a^b H(t,s)F\Biggl(s, h(s) + \int\limits_a^b G(s,\xi)y(\xi)d\xi, \dots \\ \dots, h^{(m-1)}(s) + \int\limits_a^b \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}G(s,\xi)y(\xi)\,d\xi\Biggr)ds. \end{aligned} \tag{1.15}$$ III3.17

Нескладними міркуваннями можна встановити твердження: задача (1.1), (1.2) рівносильна інтегральному рівнянню (1.15). Рівносильність розуміється в такому сенсі: якщо $y^* \in L_2[a,b]$ є розв'язком рівняння (1.15), то $(x^*(t), \lambda^*)$ — розв'язок крайової задачі (1.1), (1.2), причому

$$x^*(t) = h(t) + \int\limits_a^b G(t,s)y^*(s)\,ds, \quad \lambda^* = \sigma + \int\limits_a^b \Gamma(s)y^*(s)\,ds. \tag{1.16}$$ III3.18

І, навпаки, якщо $(x^*(t), \lambda^*)$ є розв'язком задачі (1.1), (1.2), то функція

$$y^*(t) = (Ax^*)(t) - C(t)\lambda^* \tag{1.17}$$ III3.19

є розв'язком рівняння (1.15).

Дійсно, нехай $y^*(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння (1.15). Тоді функція $x^*(t)$ і параметр λ^*, які визначаються формулами (1.16) — це розв'язок задачі (1.1), (1.2).

Справді, оскільки нескладно переконатися у правильності рівностей

$$(Ax^*)(t) = C(t)\lambda^* + y^*(t), \quad U(x^*) = \gamma, \quad \int\limits_a^b S(t)x^*(t)\,dt = \alpha, \tag{1.18}$$ III3.29

то, очевидно, крайові умови (1.2) виконуються. Встановимо, що функція $x^*(t)$ задовольняє рівняння (1.1). Для цього використаємо формули (1.13), (1.18), (1.16), (1.14), за допомогою яких отримаємо:

$$\begin{aligned} f(t) + C(t)\lambda^* - (Lx^*)(t) &= f(t) + C(t)\lambda^* - (Ax^*)(t) + (Bx^*)(t) \\ &= f(t) - y^*(t) + r_1(t)\left(h(t) + \int\limits_a^b G(t,s)y^*(s)\,ds\right)^{(m-1)} \\ &\quad + \cdots + r_m(t)\left(h(t) + \int\limits_a^b G(t,s)y^*(s)\,ds\right) \\ &= g(t) - y^*(t) + \int\limits_a^b K(t,s)y^*(s)\,ds. \qquad (1.19) \end{aligned}$$ III3.30

Отже, врахувавши ще формули (1.19) та (1.16), остаточно маємо

$$\begin{aligned} f(t) + C(t)\lambda^* - (Lx^*)(t) + \varepsilon \int\limits_a^b H(t,s)F(s, x^*(s), \ldots, x^{*(m-1)}(s))\,ds \\ = g(t) - y^*(t) + \int\limits_a^b K(t,s)y^*(s)\,ds \\ + \varepsilon \int\limits_a^b H(t,s)F\Bigg(s, h(s) + \int\limits_a^b G(s,\xi)y^*(\xi)d\xi, \ldots \\ \ldots, \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left(h(s) + \int\limits_a^b G(s,\xi)y^*(\xi)\,d\xi\right)\Bigg)ds = 0. \end{aligned}$$

Дійсно задача (1.1), (1.2) має розв'язок $(x^*(t), \lambda^*)$, який однозначно визначається за формулами (1.16) і відомому розв'язку $y^*(t)$ інтегрального рівняння (1.15).

Навпаки, нехай $(x^*(t), \lambda^*)$ — розв'язок задачі (1.1), (1.2). Оскільки за визначенням розв'язку функція $x^*(t)$ належить класу $W_2^m[a,b]$ і задовольняє умови (1.2), то, як це встановлено вище, правильна рівність

$$x^*(t) = h(t) + \int\limits_a^b G(t,s)(Ax^*)(s)\,ds. \qquad (1.20)$$ III3.31

Тепер встановимо, що функція $y^*(t)$, яка визначається формулою (1.17) — це розв'язок інтегрального рівняння (1.15). На основі формул (1.17) та (1.20) маємо

$$h(t) + \int_a^b G(t,s)y^*(s)\,ds = h(t) + \int_a^b G(t,s)(Ax^*)(s)\,ds = x^*(t), \quad (1.21)$$ III3.33

Використавши позначення (1.14) та вираз (1.21), отримаємо

$$g(t) + \int_a^b K(t,s)y^*(s)\,ds = f(t) + (Bh)(t) \\ + \int_a^b (BG)(t,s)y^*(s)\,ds = f(t) + (Bx^*)(t), \quad (1.22)$$ III3.34

$$F\left(s, h(s) + \int_a^b G(s,\xi)y^*(\xi)\,d\xi, \ldots, \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left(h(s) + \int_a^b G(s,\xi)y^*(\xi)\,d\xi\right)\right) \\ = F\left(s, x^*(s), \ldots, \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}x^*(s)\right). \quad (1.23)$$ III3.35

Підставивши вираз (1.17) в рівняння (1.15) і врахувавши формули (1.22), (1.23) та (1.13) остаточно маємо

$$g(t) - y^*(s) + \int_a^b K(t,s)y^*(s)\,ds \\ + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\left(s, h(s) + \int_a^b G(s,\xi)y^*(\xi)\,d\xi, \ldots\right. \\ \left.\ldots, \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left(h(s) + \int_a^b G(s,\xi)y^*(\xi)\,d\xi\right)\right)ds = f(t) - (Lx^*)(t) + C(t)\lambda^* \\ + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\left(s, x^*(s), \ldots, \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}x^*(s)\right)ds = 0, \quad (1.24)$$ III3.36

оскільки $(x^*(t), \lambda^*)$ — розв'язок рівняння (1.1). Рівність (1.24) засвідчує, що справді функція $y^*(t)$, що знаходиться за формулою (1.17), є розв'язком інтегрального рівняння (1.15).

n:t1 **Теорема 1.1 ([6]).** *Якщо допоміжна задача* (1.5), (1.6) *має єдиний розв'язок, то задача* (1.1), (1.2) *сумісна тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок рівняння* (1.15).

n:t2 **Теорема 1.2.** *Якщо породжуюча задача* (1.5), (1.6) *має єдиний розв'язок, то єдиний розв'язок задачі* (1.1), (1.2) *існує лише тоді, коли інтегральне рівняння* (1.15) *має єдиний розв'язок.*

Доведення. Нехай $y^*(t)$ — єдиний розв'язок інтегрального рівняння (1.15), тоді згідно з теоремою 1.1, існує розв'язок задачі (1.1), (1.2), який визначається формулами (1.9).

Припустимо, що задача (1.1), (1.2) має ще другий розв'язок $(\bar{x}(t), \bar{\lambda})$, відмінний від першого $(x^*(t), \lambda^*)$, тобто $\bar{x}(t) \neq x^*(t)$, $\bar{\lambda} \neq \lambda^*$ або виконується хоча б одна із цих нерівностей.

Тоді за теоремою 1.1 функція

$$\bar{y}(t) = (A\bar{x})(t) - C(t)\bar{\lambda} \tag{1.25}$$ III3.38

є розв'язком інтегрального рівняння (1.15). Справедливість рівності

$$y^*(t) - \bar{y}(t) = (Ax^* - A\bar{x})(t) + C(t)(\bar{\lambda} - \lambda^*) \tag{1.26}$$ III3.39

випливає із (1.17) та (1.25). За припущенням, інтегральне рівняння (1.15) має лише один розв'язок, тобто $y^*(t) = \bar{y}(t)$. Ввівши позначення $u(t) = x^*(t) - \bar{x}(t)$, $\mu = \lambda^* - \bar{\lambda}$, та, прийнявши до уваги (1.26) і те, що $x^*(t)$, $\bar{x}(t)$ задовольняють одні і ті ж самі крайові умови, отримаємо

$$(Au)(t) = C(t)\mu, \quad U(u) = 0, \quad \int\limits_a^b S(t)u(t)\,dt = 0. \tag{1.27}$$ III3.40

Рівності (1.27) виконуються лише тоді, коли $u(t) = 0$, $\mu = 0$. Отже, $x^*(t) = \bar{x}(t)$, $\lambda^* = \bar{\lambda}$, а це протирічить припущенню. Таким чином, якщо інтегральне рівняння має єдиний розв'язок, то існує тільки єдиний розв'язок задачі (1.1), (1.2).

Навпаки, нехай відомо, що задача (1.1), (1.2) має єдиний розв'язок $(x^*(t), \lambda^*)$. За теоремою 1.1 функція $y^*(t)$, що визначається формулою (1.17), — це розв'язок інтегрального рівняння (1.15). Також неважко впевнитись у справедливості формул

$$x^*(t) = h(t) + \int\limits_a^b G(t,s)((Ax^*)(s) - C(s)\lambda^*)\,ds, \tag{1.28}$$ III3.41

$$\lambda^* = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)((Ax^*)(s) - C(s)\lambda^*)\, ds = 0. \tag{1.29}$$ III3.42

Припустимо, що існує ще один розв'язок $\bar{y}(t)$ інтегрального рівняння (1.15), такий, що $\bar{y}(t) \neq y^*(t)$. Тоді і задача (1.1), (1.2)має ще один розв'язок

$$\bar{x}(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)\bar{y}(s)\, ds, \quad \bar{\lambda} = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)\bar{y}(s)\, ds. \tag{1.30}$$ III3.44

На основі формул (1.28), (1.29), (1.17) та (1.30) маємо

$$x^*(t) - \bar{x}(t) = \int_a^b G(t,s)(y^*(s) - \bar{y}(s))\, ds, \tag{1.31}$$ III3.45

$$\lambda^* - \bar{\lambda} = \int_a^b \Gamma(s)(y^*(s) - \bar{y}(s))\, ds. \tag{1.32}$$ III3.46

Оскільки задача (1.1), (1.2) має лише один розв'язок, то $x^*(t) = \bar{x}(t)$, $\lambda^* = \bar{\lambda}$, а тому рівності (1.31), (1.32) приймуть вигляд

$$\int_a^b G(t,s)(y^*(s) - \bar{y}(s))\, ds = 0, \quad \int_a^b \Gamma(s)(y^*(s) - \bar{y}(s))\, ds = 0. \tag{1.33}$$ III3.47

Рівності (1.33) є можливими лише в тому випадку, коли $y^*(t) = \bar{y}(t)$, що суперечить припущенню. Таким чином, із єдиності розв'язку задачі (1.1), (1.2) випливає єдиність розв'язку інтегрального рівняння (1.15). $\square$

Література

N1 [1] А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, К.: Ін-т математики НАН Украины, 1995, 319 с.

N2 [2] О. І. Ковтун, *Проекційно-ітеративні методи для інтегральних рівнянь з слабкою нелінійністю і додатковими умовами* // Нелінійні коливання, **3** (2000), No. 3, 365–374.

N3 [3] А. Ю. Лучка, *Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения* // Кибернетика и систем. анализ, (1996), No. 3, 82–96.

N4 [4] А. Ю. Лучка, О. М. Вознюк, *Ітераційний метод для інтегральних рівнянь з обмеженнями* // Нелінійні коливання, **5** (2002), No. 3, 179–192.

N5 [5] А. Ю. Лучка, В. А. Ферук, *Модифікований проекційно-ітеративний метод для систем квазілінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженням* // Нелінійні коливання, **7** (2004), No. 2, 188–207.

N6 [6] А. Ю. Лучка, О. Б. Нестеренко, *Методи розв'язування крайових задач для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами і обмеженнями* // Укр. мат. журн., **61** (2009), No. 5, 672–679.

N7 [7] О. Б. Нестеренко, *Ітераційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями* // Нелінійні коливання, **10** (2007), No. 3, 336–347.

N8 [8] Р. І. Петришин, Л. М. Лакуста, *Оцінки похибки методу усереднення в імпульсних крайових задачах з параметрами* // Нелінійні коливання, **5** (2002), No. 2, 193–200.

N9 [9] О. Б. Поліщук, *Модифікований проекційно-ітеративний метод розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь з параметрами та малою нелінійністю* // Укр. мат. журн., **51** (1999), No. 3, 418–423.

N10 [10] О. Б. Поліщук, *Умови сумісності задачі з обмеженнями для сингулярних інтегральних рівнянь* // Нелінійні коливання, **3** (2000), No. 4, 511–514.

N11 [11] Н. И. Ронто, *Некоторые точные условия разрешимости начальной задачи для систем линейных функционально-диференциальных уравнений* // Нелінійні коливання, **7** (2004), No. 4, 538–554.

N12 [12] Н. И. Ронто, В. А. Ронто, *Об одном методе исследования краевых задач с параметрами*, Краевые задачи математической физики, Киев: Наук. думка, 1990, 3–10.

N13 [13] А. М. Самойленко, Р. І. Петришин, Л. М. Лакуста, *Усереднення крайових задач з параметрами для багатоточкових імпульсних систем* // Укр. мат. журн, **54** (2002), No. 9, 1237–1249.

N14 [14] В. А. Ферук, *Ітераційний метод для систем нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями* // Нелінійні коливання, **6** (2003), No. 3, 428–436.

N15 [15] В. А. Ферук, *Один варіант проекційно-ітеративного методу для систем лінійних диференціальних рівнянь із запізненням нейтрального типу та обмеженнями* // Нелінійні коливання, **9** (2006), No. 4, 564–573.

journalg

Відомості про авторів

Ольга Б. Нестеренко

Київський національний університет
технологій та дизайну
вул. Немировича-Данченка, 2,
Київ, 01601,
Україна
E-Mail: `Olga_kiev@mail.ru`