УДК 648.235

# ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ БАРАБАННОЇ МАШИНИ З НЕЛІНІЙНИМ ПРУЖИННИМ ПІДВІСОМ БАКА ПРИ КОЛИВАННЯХ У ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

М.Й. БОНДАРЕНКО, І. В. ПЕТКО

Київський національний університет технологій та дизайну

*Розглянуто питання визначення власних частот барабанних машин*

***Постановка завдання***

Завданням дослідження є розробка алгоритму визначення власних частот барабанної машини з нелінійним пружинним підвісом барабана.

***Об'єкти та методи дослідження***

Об'єктом досліджень є пружинна підвіска бака барабанної машини. При вирішенні завдань, що поставлені в цій роботі, використано сучасні методи теоретичних досліджень, які базуються на теоретичній механіці, динаміці машин та теорії нелінійних коливань.

***Результати та їх обговорення***

Параметри динамічних систем барабанних машин залежать від значень власних частот. Метою досліджень є визначення власних частот при нелінійній характеристиці пружної підвіски бака.

Прийнято до уваги масу $m_{2\Sigma}$ бака 2 в зборі з барабаном, противагами, двигуном, шківами пасової передачі й жорсткість пружин підвіски (їхня кількість дорівнює П). З огляду на те, що коливання корпусу 1 машини незначні в порівнянні з коливаннями бака (що підтверджено експериментально) корпус машини приймаємо нерухливим. Зневажаємо також диссипативними опорами при деформації пружин і переміщенні штоків демпферів через невеликий вплив цих опорів на власні частоти системи. Початок О нерухомої системи координат yOz розташовуємо на геометричній осі завантажувального отвору передньої стінки машини в статичному стані машини. Приймемо, що обертання ротора двигуна й барабана щодо бака відсутнє. З баком у зборі жорстко зв'яжемо відносну систему координат $y_2O_2z_2$ з початком ($O_2$) у центрі мас бака. Вісь $O_2y_2$ направимо паралельно осі отворів кріплення пружин на баку, вісь $O_2z_2$ – перпендикулярно до $O_2y_2$.

Зміщення центру $O_2$ мас бака відносно початку О нерухомої системи координат позначимо через $y_{O_2}$, $z_{O_2}$; кут $\varphi_2$ абсолютного повороту бака відраховуємо від осі Оу у напрямку, протилежному обертанню годинникової стрілки. Координати точок $B_i$ кріплення пружини до бака у системі yOz виразимо через координати $y_{O_2}$, $z_{O_2}$, $\varphi_2$

$$\begin{aligned} y_{B_i} &= y_{O_2} + y_{B_i} \cdot 2 \cdot \cos\varphi_2 - z_{B_i} \cdot 2 \cdot \sin\varphi_2, \\ z_{B_i} &= z_{O_2} + y_{B_i} \cdot 2 \cdot \sin\varphi_2 + z_{B_i} \cdot 2 \cdot \cos\varphi_2, i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{1}$$

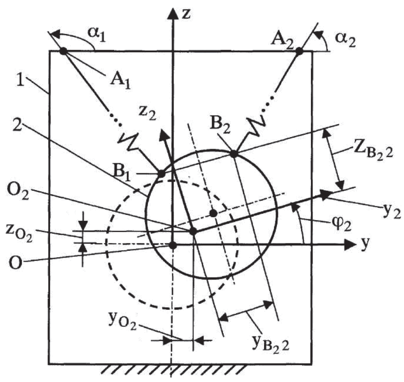
Тут $y_{B_i2}, z_{B_i2}$ – значення координат $y_{B_i}, z_{B_i}$ точок $B_i$ відносно нерухомо пов'язаної з баком системи координат $y_2O_2z_2$ з початком $O_2$ у центрі мас бака (у зборі). Довжина деформованої і -ої пружини

$$L_i = \sqrt{\left(y_{A_i} - y_{B_i}\right)^2 + \left(z_{A_i} - z_{B_i}\right)^2} \tag{2}$$

де $y_{A_i}, z_{A_i}$ – координати точок $A_j$ кріплення пружин до корпуса машини в абсолютній системі координат yOz. Реакція $P_j$ і -ої пружини, що діє на бак

$$P_i = c_i\left(L_i - L_{i,O}\right) \tag{3}$$

де $L_{j0}$ – довжина пружини в недеформованому стані, $C_i$ – жорсткість і -ої пружини.




**Розрахункова схема**

Рівняння вільних коливань бака на пружинній підвісці, як системи, що робить плоскопаралельний рух (3 ступені вільності, узагальнені координати $y_{O_2}, z_{O_2}, \varphi_2$), мають вид [1]

$$\begin{aligned}
&m_{2\Sigma}\cdot \ddot{y}_{O_2} = \sum_{i=1}^{n} P_i\cdot\cos\alpha_i,\\
&m_{2\Sigma}\cdot \ddot{z}_{O_2} = \sum_{i=1}^{n} P_i\cdot\sin\alpha_i - m_{2\Sigma}g,\\
&l_2\ddot{\varphi}_2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_{B_i}-y_{O_2}\right)P_i\sin\alpha_i - \left(z_{B_i}-z_{O_2}\right)P_i\cos\alpha_i\right], i=\overline{1,n}
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут $\alpha_j$ – поточний кут між віссю Oy та геометричною віссю і-ої пружини, що відраховується проти руху годинникової стрілки , $g$ – прискорення вільного падіння, $m_{2\Sigma}$ – сумарна маса бака (в зборі з противагами, двигуном, пасовою передачею і т.і.), $I_2$ – момент інерції бака в зборі щодо осі, що проходить через його центр мас $O_2$ паралельно осі обертання барабана, $n$ – кількість пружин підвіски бака.

Тригонометричні функції кутів $\alpha_j$, які входять у (4) виражені через постійні координати точок $A_j$ і змінні точок $B_j$, а також узагальнені координати $y_{O_2}, z_{O_2}, \varphi_2$, визначаються залежностями

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_i &= \frac{y_{A_i}-y_{B_i}}{\sqrt{\left(y_{A_i}-y_{B_i}\right)^2+\left(z_{A_i}-z_{B_i}\right)^2}},\\
\sin\alpha_i &= \frac{z_{A_i}-z_{B_i}}{\sqrt{\left(y_{A_i}-y_{B_i}\right)^2+\left(z_{A_i}-z_{B_i}\right)^2}}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Істотно нелінійні праві частини рівнянь (4) позначимо відповідно як

$$\Phi_1(y_{O_2}, z_{O_2}, \varphi_2),\ \Phi_2(y_{O_2}, z_{O_2}, \varphi_2),\ \Phi_3(y_{O_2}, z_{O_2}, \varphi_2).$$

Для визначення власних частот лінеаризуємо праві частини рівнянь (4) в ділянці положення статичної рівноваги $y_{O_2}$ = a, $z_{O_2}$ = b, $\varphi_2 = \varphi_{O_2}$ . Для цього подамо праві частини у виді кратного ряду Тейлора з утриманням лінійних членів, тобто

$$\Phi_i\left(y_{O_2}, z_{O_2}, \varphi_O\right) = \Phi_i(a,b,\varphi_O) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_0)\cdot\left(y_{O_2} - a\right) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_O)\left(z_{O_2} - b\right) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_2}\Big|(a,b,\varphi_O)(\varphi_2 - \varphi_O), i = \overline{1,3}. \tag{6}$$

Через громіздкість виражень частинних похідних аналітичні залежності були отримані (на ЕОМ) з використанням стандартної програми MAPLE. З огляду на те, що для положення статичної рівноваги

$$\Phi_i(a,b,\varphi_O) = 0, i = \overline{1,3}. \tag{7}$$

і замінюючи змінні

$$y_{O_2} - a = \Delta y_{O_2}, z_{O_2} - b = \Delta z_{O_2}, \varphi_2 - \varphi_O = \Delta\varphi_2, \tag{8}$$

з (4) одержимо диференціальні рівняння для малих коливань в області положення статичної рівноваги в наступному виді

$$\begin{aligned}
m_{2\Sigma}\Delta\ddot{y}_{O2} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_1}}\Big|(a,b,\varphi_o)\Delta y_{O_2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)\Delta z_{O2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_2}\Big|(a,b,\varphi_o)\Delta\varphi_2,\\
m_{2\Sigma}\Delta\ddot{z}_{O2} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)\Delta y_{O_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)\Delta z_{O2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}\Big|(a,b,\varphi_o)\Delta\varphi_2,\\
I_2\Delta\ddot{z}_{O2} &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)\Delta y_{O_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)\Delta z_{O2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\Big|(a,b,\varphi_o)\Delta\varphi_2,.
\end{aligned} \tag{9}$$

Частинний розв'язок лінійної системи диференційних рівнянь (9) можна представити у формі [2, 3]

$$\Delta y_{O_2} = A_y \sin\omega t, \Delta z_{O_2} = A_z \sin\omega t, \Delta\varphi_2 = A_\varphi \sin\omega t, \tag{10}$$

де $A_y$, $A_z$, $A_\varphi$ – амплітуди, $\omega$ – частота.

Підставляючи (10) в (9), одержимо

$$\begin{aligned}
&\left(m_{2\Sigma}\omega^2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)\right)A_y + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)A_z + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_2}\Big|(a,b,\varphi_o)A_\varphi = 0,\\
&\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)A_y + \left(m_{2\Sigma}\omega^2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)\right)A_z + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}\Big|(a,b,\varphi_o)A_\varphi = 0,\\
&\frac{\partial \Phi_3}{\partial z_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)A_y + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z_{O_2}}\Big|(a,b,\varphi_o)A_z + \left(I_2\omega^2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\Big|(a,b,\varphi_o)\right)A_\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Система однорідних лінійних рівнянь (11) дозволяє визначити відношення амплітуд $A_y$, $A_z$, $A_\varphi$. Крім того, для одержання розв'язку, відмінного від нуля, визначник, складений з коефіцієнтів при $A_y$, $A_z$, $A_\varphi$ в (11), дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix}
m_{2\Sigma}\omega^2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|_c & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_{O_2}}\Big|_c & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_2}\Big|_c \\
\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{O_2}}\Big|_c & m_{2\Sigma}\omega^2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_{O_2}}\Big|_c & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}\Big|_c \\
\frac{\partial \Phi_3}{\partial y_{O_2}}\Big|_c & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z_{O_2}}\Big|_c & I_2\omega^2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\Big|_c
\end{vmatrix} \tag{12}$$

Це дає можливість одержати частотне рівняння системи у виді

$$\omega^6 + N_1\,\omega^4 + N_2\,\omega^2 + N_3 = 0 \tag{13}$$

Коефіцієнти $N_k$ в (13):

$$
\begin{aligned}
&N_1=\frac{1}{m_{2\Sigma}}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|_c+\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\Big|_c\right)+\frac{1}{I_2}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2},\\
&N_2=\frac{1}{m_{2\Sigma}^2}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|_c+\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\Big|_c+\frac{1}{m_{2\Sigma}I_2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_c+\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_c+\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}\Big|_c-\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\Big|_c\right)-\\
&-\frac{1}{m_{2\Sigma}^2}\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}\Big|_c,\\
&N_3=\frac{1}{m_{2\Sigma}^2 I_2}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|_c\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_c-\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}\Big|_c\right)+\frac{1}{m_{2\Sigma}^2 I_2}\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}}\Big|_c\left(\begin{matrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}\Big|_c-\\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_c\end{matrix}\right)+\\
&+\frac{1}{m_{2\Sigma}^2 I_2}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\Big|_c\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\Big|_c-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\Big|_c\right).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Необхідні для обчислення власних частот координати $a$, $b$, $\varphi_0$ статичної рівноваги на підставі (4) і (6) при $y_0=0$, $Z_0=0$, $\varphi_2=0$ можуть бути визначені послідовними наближеннями для системи рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_{O_2}}\Big|\left(a_j,b_j,\varphi_{Oj}\right)\cdot a_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial z_{O_2}}\Big|\left(a_j,b_j,\varphi_{Oj}\right)\cdot b_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial\varphi_2}\Big|\left(a_j,b_j,\varphi_{Oj}\right)\cdot\varphi_{Oj}=\\
&=\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_{O_2}}\Big|\left(a_j,b_j,\varphi_{Oj}\right)y_{O_2}(j)+\frac{\partial\Phi_i}{\partial z_{O_2}}\Big|\left(a_j,b_j,\varphi_{Oj}\right)z_{O_2}(j)+\frac{\partial\Phi_i}{\partial\varphi_2}\Big|\left(a_j,b_j,\varphi_{Oj}\right)\cdot\varphi_2(j)-\Phi_j\left(a_j,b_j,\varphi_{Oj}\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Приймаючи, наприклад, $j$=l, $y_{0_2(1)}=0$, $z_{0_2(1)}=0$, $\varphi_{0(1)}=0$ із системи рівнянь (15) знаходимо $a_{(1)}$, $b_{(1)}$, $\varphi_{0(1)}$ – попередні значення координат центра мас при $j$=l. Використовуючи далі (15) для другого наближення ($j$=2) і роблячи заміни $y_{0_2(2)}=a_{(1)}$, $z_{0_2(2)}=b_{(1)}$, $\varphi_2=\varphi_{0(1)}$, обчислюємо $a_2$, $b_2$, $\varphi_{0(2)}$. Далі відзначена процедура повторюється. Щоразу перевіряються нерівності

$$
-\varepsilon<\frac{\Phi_i\left(y_{O_2(j)},z_{O_2(j)},\varphi_2(j)\right)}{m_{2\Sigma}g}<\varepsilon, i=\overline{1,3}.
\tag{16}
$$

де $\varepsilon$ – малий параметр (наприклад, $10^{-4}$). Після виконання умов (16) в $k$-му циклі ($j$=k) остаточні значення координат центра $O_2$ мас і кут повороту бака в статичному положенні приймаються наступними

$$
y_{O_2,c}=a_k, z_{O_2,c}=b_k, \varphi_{2,c}=\varphi_{Ok}
\tag{17}
$$

Через істотну нелінійність похідних $\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_{0_2}}$, $\frac{\partial\Phi_i}{\partial z_{0_2}}$, $\frac{\partial\Phi_i}{\partial\varphi_2}$ умови (16) можуть бути не виконані. Тоді вибирається найкраща з перевірених $s$ -а ітерація й фіксуються значення $\Phi_{1(s)}$, $\Phi_{2(s)}$, $\Phi_{3(s)}$, $\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{0_1}}\Big|(s)$, $\frac{\partial\Phi 2}{\partial z_{0_2}}\Big|(s)$, $\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|(s)$ по яких обчислюються

$$
\begin{aligned}
&\Delta y_{O_2(S+1)}=\frac{\Phi_{1(s)}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|(s)}, \Delta z_{O_2(s+1)}=\frac{\Phi_{2(s)}}{\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}}\Big|(s)}, \Delta\varphi_{2(s+1)}=\frac{\Phi_{3(s)}}{\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\Big|(s)},\\
&z_{O_2(s+1)}=z_{O_2(s)}-\Delta z_{O_2(s+1)}, y_{O_2(s+1)}=y_{O_2(s)}-\Delta y_{O_2(s+1)},\\
&\varphi_{2(s+1)}=\varphi_{(s)}-\Delta\varphi_{(s+1)}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

За отриманими значеннями $\Delta y_{0_2(s+1)}$, $\Delta z_{0_2(s+1)}$, $\Delta\varphi_{2(s+1)}$ як і раніше проводимо ітерацію і обчислюємо $\Phi_{1(s+1)}$, $\Phi_{2(s+1)}$, $\Phi_{3(s+1)}$, $\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{0_1}}\Big|_{(s+1)}$, $\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{0_2}}\Big|_{(s+1)}$, $\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_{(s+1)}$ і зіставляємо з (16) до задоволення нерівностей. На підставі отриманих координат центра мас у статичному положенні системи

$$y_{O_2C} \approx y_{O_2C(l)}, z_{O_2C} \approx z_{O_2C(l)}, \varphi_{2C} \approx \varphi_{2(l)} \tag{19}$$

з (12) знаходяться три власні частоти системи.

Позначення $\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_{0_2}}\Big|_c$, $\frac{\partial\Phi_i}{\partial z_{0_2}}\Big|_c$, $\frac{\partial\Phi_i}{\partial\varphi_2}\Big|_c$ відносяться до значень відзначених частинних похідних у положенні статичної рівноваги. Як витікає з (12) при "симетрії" системи, тобто, наприклад, при і = 2, $y_{A_1} = -y_{A_2}$, $z_{A_1} = -z_{A_2}$, $y_{B_1} = -y_{B_2}$, $z_{B_1} = -z_{B_2}$, $c_1 = c_2$, $L_{1,0} = L_{2,0}$ система (12) розпадається на дві підсистеми внаслідок того, що

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2} = \frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}} = 0 \tag{20}$$

Таким чином, приведена жорсткість $c_{z,c}$ обох пружин у статичному стані (по координаті $z_{O_2}$) і відповідна власна частота $\omega_z$ при відзначеній симетрії можуть бути представлені залежностями

$$c_{z,c} = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\Big|_c = 2c_1\left(1 - \frac{L_{1,0}\cos^2\alpha_1}{\sqrt{\left(y_{A_1} - y_{B_1}\right)^2 + \left(z_{A_1} - z_{B_1}\right)^2}}\right)\Bigg|_c, \omega_1 = \omega_z = \sqrt{\frac{c_{z,c}}{m_{2\Sigma}}}. \tag{21}$$

В (21) кут $\alpha_1$ і координати $y_{B_1}$, $z_{B_1}$ повинні прийматися для положення статичної рівноваги відповідно до (1) і (5) та $y_{O_2} = y_{O_2C}, z_{O_2} = z_{O_2C}, \varphi_2 = \varphi_{2C}$. Зв'язані власні частоти горизонтальних і кутових коливань такої "симетричної" системи, що розпалась, визначаються з біквадратного рівняння

$$\omega^4 + \omega^2\left(\frac{1}{J_2}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_c + \frac{1}{m_{2\Sigma}}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}\Big|_c\right) + \frac{1}{m_{2\Sigma}J_2}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_c - \frac{1}{m_{2\Sigma}J_2}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\Big|_c = 0 \tag{22}$$

Однакові частоти $\omega_2 = \omega_3$ у цій підсистемі можуть бути при параметрах

$$\begin{gathered}\frac{1}{J_2}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_c - \frac{1}{m_{2\Sigma}}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|_c = \pm 2\sqrt{\frac{1}{m_{2\Sigma}J_2}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}\Big|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\Big|_c},\\ \omega_{2,3} = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_2}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\Big|_c + \frac{1}{m_{2\Sigma}}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|_c\right)},\end{gathered} \tag{23}$$

якщо одержувані $\omega_{2,3}$ – дійсні числа.

Деякий інтерес може представити визначення власних частот розглянутої системи при центральному моменті інерції $I_2 = 0$ (варіант не завантаженої машини). У цьому випадку третє рівняння (4) дає залежність $\Phi_3(y_{0_2}, z_{0_2}, \varphi_2) = 0$, внаслідок чого

$$\Delta\varphi_2 = -\frac{1}{\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_c}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_c\Delta y_{O_2} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\Big|_c\Delta z_{O_2}\right). \tag{24}$$

Таким чином, частотне рівняння може бути знайдене з визначника другого порядку

$$\begin{vmatrix} m_{2\Sigma}\omega^2+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}|_c-\frac{1}{\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}|_c}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}|_c\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}|_c & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}|_c-\frac{1}{\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}|_c}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}|_c\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}|_c \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}}|_c-\frac{1}{\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}|_c}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}|_c\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}|_c & m_{2\Sigma}\omega^2+\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}|_c-\frac{1}{\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}|_c}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}|_c\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}|_c \end{vmatrix}=0. \tag{25}$$

Якщо система при цьому має «симетричні» параметри, то члени визначника $a_{12}$ і $a_{21}$ дорівнюють нулю через те, що $\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{0_2}}\right|_c=\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{0_2}}\right|_c=\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{0_2}}\right|_c=\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\right|_c=0$ і обидві частоти системи можуть бути знайдені із залежностей

$$\omega_1=\sqrt{-\frac{1}{m_{2\Sigma}}\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}|_c},\ \omega_2=\sqrt{\frac{1}{m_{2\Sigma}}\left(-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}|_c+\frac{\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}|_c\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}|_c}{\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}|_c}\right)}. \tag{26}$$

Як видно, при $I_2 = 0$ і відзначеній симетрії параметрів змінюється тільки частота $\omega_2$.

Для проведення розрахунків по визначенню координат статичної рівноваги й власних частот барабанних машин розроблена програма для ЕОМ. Наприклад, для «симетричної» системи (барабанні пральні машини-автомати з фронтальним завантаженням) з параметрами:

$m_{22} = 58{,}82$ кг, $I_2 = 0$ кгм$^2$, $g = 9{,}8$ м/с$^2$, $y_{A_1} = -0{,}265$ м, $y_{A_2} = 0{,}265$ м, $z_{A_1} = z_{A_2} = 0{,}31$ м,

$y_{B_1} = 0{,}221$м, $y_{B_2} = 0{,}221$ м, $z_{B_1} = z_{B_2} = 0{,}157$ м, $c_1 = c_2 = 4625$ Н/м, $L_{1,0} = L_{2,0} = 0{,}1465$ м

в результаті розрахунку одержимо:

$y_{0_2,c} = 0$, $z_{0_2,c} = -0{,}0261\cdot м$ м, $\varphi_{2,c} = 0$, $P_1 = 297{,}1$ Н, $\alpha_1 = 1{,}8117$ рад, $\sin\alpha_1 = 0{,}9711$,

$\cos\alpha_1 = -0{,}2386$, $\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{0_2}}\right|_c = -0{,}3932\cdot10^4$ Н/м, $\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{0_2}}\right|_c = -1{,}4971\cdot10^4$ Н/м, $\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\right|_c = -0{,}075$ Нм/рад,

$\omega_1 = 15{,}954$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 13{,}696$ с$^{-1}$, $\omega_3 = 8{,}168$ с$^{-1}$.

Використовувані інколи наближені формули для обчислення власних частот $\omega_1^*$ та $\omega_2^*$ при $c_1 = c_2$ дають інші результати: $\omega_1^* = \sin\alpha_1\sqrt{\frac{2C_1}{m_{2\Sigma}}} = 12{,}177$ с$^{-1}$, $\omega_2^* = \cos\alpha_1\sqrt{\frac{2C_1}{m_{2\Sigma}}} = 2{,}992$ с$^{-1}$.

***Висновки***

Проведені розрахунки за розробленим алгоритмом суттєво уточнюють значення власних частот, що визначені за наближеними залежностями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механіки. Часть 2. – М.: Наука, –1996. –332 с.
2. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. – К.: Из-во АН УССР, – 1961. –160 с.
3. Филиппов А.П. Колебания механических систем. –К.: Наукова думка, – 1965. –716 с.

Надійшла